VETTORI

- ☐ Definizioni e terminologia
- ☐ Componenti cartesiane di un vettore nel piano e nello spazio
- ☐ Le operazioni algebriche con i vettori
- ☐ Prodotto scalare tra due vettori
- ☐ Prodotto vettoriale tra due vettori

Definizioni e terminologia

Introduzione

1 In questo capitolo studieremo i vettori, oggetti che lo studente conosce già, almeno negli aspetti basilari, ad esempio per le innumerevoli applicazioni in fisica.
Dopo aver introdotto diverse importanti definizioni, impareremo a calcolare le componenti cartesiane di un vettore e le sue componenti rispetto a una determinata retta.
Affronteremo quindi l'algebra dei vettori, introducendo le diverse operazioni e le relative proprietà: la somma di vettori, il prodotto di un vettore per uno scalare, cioè per un numero, che non va confuso con il prodotto scalare tra due vettori, e infine il prodotto vettoriale tra vettori.

Grandezze scalari e grandezze vettoriali

2 Come sappiamo, vi sono delle grandezze, come la lunghezza di un segmento, la massa di un corpo, un intervallo di tempo, l'energia, ecc., che risultano completamente definite quando se ne conosce la misura rispetto a una prefissata unità: esse sono individuabili per mezzo di un numero, detto **scalare**; tali grandezze sono perciò dette **grandezze scalari**.

Vi sono invece delle grandezze, come uno spostamento, una velocità, una forza, ecc., che non sono rappresentabili da un solo numero, ma *da un numero*, *da una direzione e da un verso*. Per esempio, quando si vuole individuare lo spostamento effettuato da un punto mobile A, non basta conoscere il numero di metri percorsi da A, ma occorre sapere anche la direzione lungo la quale si è mosso e, su tale direzione, il verso di percorrenza.
L'ente che individua contemporaneamente tutte queste grandezze è detto **vettore** e perciò le grandezze di questo tipo sono dette **grandezze vettoriali**.

Definizione di vettore

3 Per rappresentare geometricamente un vettore si ricorre di solito a un segmento orientato, avente direzione e verso uguali a quelle del vettore da rappresentare e lunghezza che, rispetto a una prefissata unità, ha misura uguale alla misura della grandezza vettoriale da rappresentare.

È perciò evidente che due segmenti orientati aventi uguali lunghezza, direzione e verso devono rappresentare un medesimo vettore.
Per tale motivo, prima di definire con maggiore rigore il concetto di vettore, premettiamo la seguente definizione.

D Se AB e CD sono segmenti orientati paralleli, congruenti ed equiversi, si dice che essi sono **equipollenti**.

Si conviene inoltre che tutti i segmenti nulli, ossia quelli aventi il primo e il secondo estremo coincidenti, siano tra loro equipollenti.

La relazione di equipollenza tra segmenti orientati, com'è facile verificare, gode delle proprietà:

a) *riflessiva*: ogni segmento orientato è equipollente a se stesso;

b) *simmetrica*: se AB è equipollente a CD, allora CD è equipollente ad AB;

c) *transitiva*: se due segmenti orientati sono equipollenti a un terzo, essi sono equipollenti tra loro.

L'equipollenza è dunque una *relazione d'equivalenza* definita nell'insieme dei segmenti orientati di un piano o dello spazio.

D Sia AB un segmento orientato dal punto A al punto B. Si chiama **vettore** $\overrightarrow{AB}$ l'insieme di tutti i segmenti orientati (di un piano prefissato o dello spazio) equipollenti ad AB.

Più precisamente, potremmo dire che il vettore $\overrightarrow{AB}$ è la classe di equivalenza, modulo la relazione di equipollenza, cui appartiene il segmento orientato AB.
In altre parole, se AB e CD sono due segmenti paralleli, congruenti ed equiversi, ossia equipollenti, essi definiscono lo stesso vettore e possiamo quindi scrivere

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$$

Un vettore si può rappresentare mediante un segmento orientato, il cui verso sarà indicato da una freccia, come nella figura 1, dove è rappresentato il vettore $\overrightarrow{AB}$. Naturalmente lo stesso vettore può essere rappresentato da qualunque altro segmento orientato equipollente ad AB.
Per indicare un vettore senza fare riferimento agli estremi di un particolare segmento orientato, useremo una lettera minuscola, in corsivo, con una freccia sovrapposta, ad esempio $\vec{v}$.

Nella figura 1, per esempio, è rappresentato il vettore $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$. Inoltre il vettore $\overrightarrow{AB}$ può anche essere indicato con il simbolo $B - A$ (si legge B *meno* A).

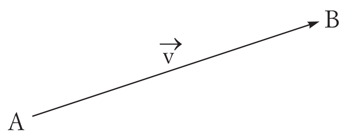


Figura 1

Consideriamo in un piano, su cui sia stato fissato un riferimento cartesiano, i punti $A(-1\,;\,3)$, $B(2\,;\,-1)$, $C(-4\,;\,1)$, $D(-1\,;\,-3)$.
Come si può facilmente verificare, i segmenti orientati AB e CD sono equipollenti e perciò si può scrivere $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ (fig. 2).

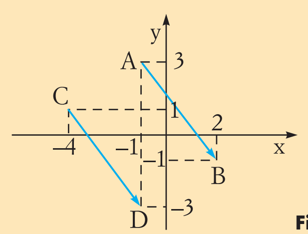


Figura 2

Osservazione

4 La definizione di vettore appena data può essere compresa più facilmente se si osservano alcune analogie con la definizione di numero razionale. Ricordiamo che la relazione "rappresentare lo stesso quoto", definita nell'insieme delle frazioni, è anch'essa, come la relazione di equipollenza tra segmenti orientati, riflessiva, simmetrica e transitiva: è, cioè, una *relazione di equivalenza*. L'insieme di tutte le frazioni aventi lo stesso valore di una frazione data costituisce un nuovo ente, detto *numero razionale*. Allo stesso modo, l'insieme di tutti i segmenti orientati equipollenti a un dato segmento orientato costituisce un nuovo ente, detto *vettore*. Scrivendo $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$ non facciamo che asserire che le frazioni $\frac{3}{4}$ e $\frac{6}{8}$ identificano lo stesso numero razionale; analogamente, se AB e CD sono segmenti orientati equipollenti, scrivendo $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ affermiamo che questi due segmenti identificano uno stesso vettore.

Abbiamo detto che un vettore è costituito da una classe di equivalenza di segmenti orientati equipollenti. Rappresentando un vettore con un particolare segmento della classe, fissiamo un punto di applicazione (l'estremo iniziale del segmento), ma scegliendo un segmento diverso della stessa classe cambierà il punto di applicazione. Sottolineiamo quindi che *un vettore non è vincolato al suo punto di applicazione*.

Modulo di un vettore. Vettore nullo. Versore

5 **D** Si dice **modulo** di un vettore $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ la misura della lunghezza del segmento AB rispetto a una prefissata unità di misura.

Il modulo del vettore $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ si indica indifferentemente con uno dei seguenti simboli

$$|\vec{v}|; \qquad v; \qquad |\overrightarrow{AB}|; \qquad |B - A|$$

Osserviamo che, in base alla definizione data, *il modulo di un vettore è sempre un numero reale non negativo*, cioè è $v \geq 0$.

È anche evidente che può risultare $v = 0$ solo se il vettore $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ è rappresentato da un segmento di lunghezza nulla: ciò può accadere se e solo se i due estremi A e B coincidono. Poiché si è convenuto di considerare equipollenti tutti i segmenti nulli (paragrafo 3), essi definiscono un unico vettore, detto **vettore nullo**.

Il vettore nullo si indica con $\mathbf{0}$ e si ha perciò $\mathbf{0} = \overrightarrow{AA}$, per qualsiasi punto A.

D Un vettore di modulo unitario, diretto e orientato come un dato vettore $\vec{v}$, è detto **versore** del vettore $\vec{v}$.

Componente di un vettore secondo una retta

6 Sia $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ un vettore e sia r una retta orientata (figura 3, tenendo presente che AB e r non sono necessariamente complanari).
Consideriamo un segmento orientato A_1B_1, equipollente ad AB, avente il primo estremo A_1 sulla retta r: sarà $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1}$.

Sia B_2 la proiezione ortogonale di B_1 su r. Il vettore $\overrightarrow{A_1B_2}$, che ha la stessa direzione di r, è detto **vettore componente di $\vec{v}$ secondo la retta r**.

Se φ è l'angolo formato da $\overrightarrow{A_1B_1}$ con la direzione positiva della retta r, il modulo del vettore $\overrightarrow{A_1B_2}$ sarà uguale a $|v \cos \varphi|$.

Il numero

$$v_r = v \cos \varphi \qquad (1)$$

è detto **componente di $\vec{v}$ secondo r**.

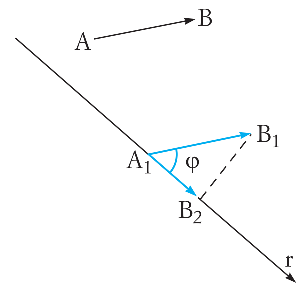


Figura 3

È evidente che, essendo v sempre positivo per un vettore $\vec{v}$ non nullo, v_r sarà *positivo* quando φ è *acuto* e sarà *negativo* quando φ è *ottuso*; v_r sarà *nullo* quando $\varphi = 90°$.

Notiamo che se s è una retta orientata parallela ed equiversa a r, essendo in tale caso $v_r = v \cos\varphi_r$ e $v_s = v \cos\varphi_s$, con $\varphi_r = \varphi_s$, si avrà

$$v_s = v_r$$

Infine, chiameremo *componente di un vettore $\vec{v}$ rispetto a un vettore $\vec{w}$*, la componente di $\vec{v}$ secondo una qualsiasi retta parallela al vettore $\vec{w}$ e avente lo stesso orientamento. Ovviamente, se φ è l'angolo convesso formato da $\vec{v}$ e $\vec{w}$, la componente di $\vec{v}$ rispetto a $\vec{w}$ è data ancora dalla (1).

Sia $\vec{v}$ un vettore di modulo $v = \sqrt{3}$, che forma con la direzione positiva della retta orientata r un angolo di 150°. La componente di $\vec{v}$ secondo r sarà allora

$$v_r = v \cos 150° = \sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{3}{2}$$

Osservazione. D'ora in poi chiameremo angolo formato da un vettore $\overrightarrow{AB}$ con una retta orientata r *l'angolo convesso* formato da r e da un segmento orientato A_1B_1, equipollente ad AB e avente l'estremo A_1 su r. Analogamente, si può definire l'*angolo formato da due vettori* come l'angolo formato dal primo vettore con una retta orientata, parallela ed equiversa al secondo vettore e passante per il primo estremo del primo vettore. Si noti che tale definizione è valida anche se i due vettori sono rappresentati da segmenti orientati non complanari.

Componenti cartesiane di un vettore nel piano e nello spazio

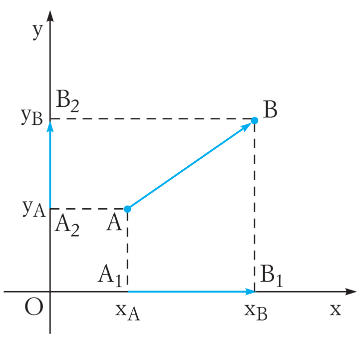
Componenti cartesiane di un vettore nel piano

7 Sia α un prefissato piano su cui sia fissato un riferimento cartesiano. Consideriamo l'insieme dei vettori del piano α, ossia i vettori rappresentati da segmenti orientati che giacciono su tale piano.

D Si dicono **componenti cartesiane** del vettore $\vec{v}$, e si indicano con v_x e v_y, le componenti di $\vec{v}$ secondo, rispettivamente, l'asse x e l'asse y.

Se è $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ e se i segmenti A_1B_1 e A_2B_2 sono, rispettivamente, le proiezioni del segmento orientato AB sull'asse delle x e sull'asse delle y, è facile rendersi conto (fig. 4) che i vettori $\overrightarrow{A_1B_1}$ e $\overrightarrow{A_2B_2}$ sono, rispettivamente, i vettori componenti del vettore $\overrightarrow{AB}$ secondo l'asse delle ascisse e secondo l'asse delle ordinate; si ha quindi

$$v_x = x_B - x_A; \qquad v_y = y_B - y_A \tag{1}$$



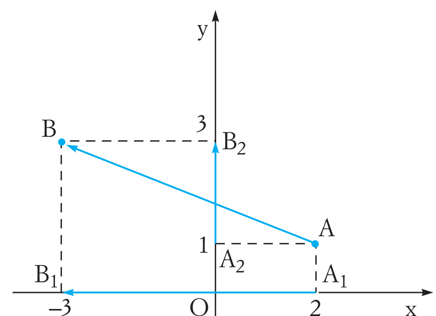


Figura 4

Per identificare un vettore mediante le sue componenti cartesiane, scriveremo anche

$$\vec{v} = (v_x \,;\, v_y)$$

Infine, si conviene che il vettore nullo abbia le componenti cartesiane entrambe nulle

$$\mathbf{0} = (0\,;\,0)$$

Sia $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, dove $A(2\,;\,1)$, $B(-3\,;\,3)$. Determiniamo le componenti cartesiane del vettore $\vec{v}$ (fig. 4).
Applicando le (1) si ha

$$v_x = -3 - 2 = -5; \qquad v_y = 3 - 1 = 2$$

Possiamo quindi scrivere $\vec{v} = (-5\,;\,2)$.

Osservazione

8 È importante osservare che le componenti cartesiane di un vettore $\vec{v}$ non dipendono dalla scelta del segmento che rappresenta $\vec{v}$. Infatti, come si potrebbe dimostrare con semplici considerazioni di geometria elementare, due segmenti orientati AB e CD, sono equipollenti se e soltanto se (fig. 5)

$$x_B - x_A = x_D - x_C \quad \wedge \quad y_B - y_A = y_D - y_C$$

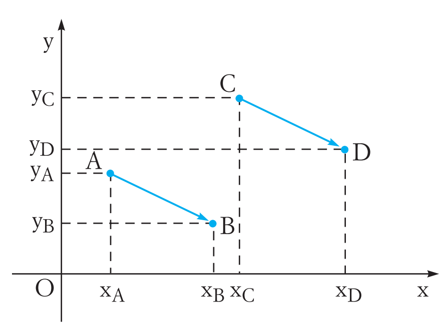


Figura 5

La definizione di componenti cartesiane data prima è perciò indipendente dal segmento orientato scelto per rappresentare $\vec{v}$. D'altra parte, se i vettori $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ hanno le stesse componenti, per quanto detto sopra, AB e CD sono equipollenti, perciò $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Dunque *un vettore può essere identificato mediante le sue componenti cartesiane.*
Se $\vec{v} = (v_x\,;\,v_y)$ è un vettore noto mediante le sue componenti, è facile determinare un segmento orientato che lo rappresenti. Se indichiamo con O l'origine degli assi cartesiani e con P il punto di coordinate $(v_x\,;\,v_y)$, si ha che le componenti di $\overrightarrow{OP}$ coincidono con quelle di $\vec{v}$, perciò $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$ (fig. 6).

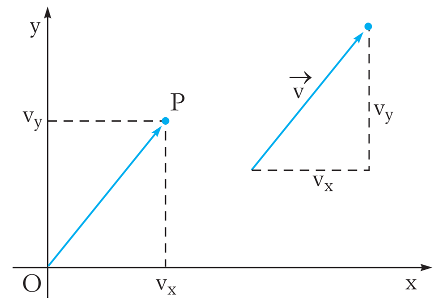


Figura 6

1 Sono dati i punti $A(1\,;\,2)$, $B(3\,;\,1)$, $C\left(\frac{7}{2}\,;\,\frac{7}{2}\right)$, $D\left(\frac{11}{2}\,;\,\frac{5}{2}\right)$. Dopo aver verificato che i segmenti orientati AB e CD sono equipollenti, calcolare le componenti cartesiane dei vettori $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$.

Calcoliamo i coefficienti angolari m_{AB} e m_{CD} delle rette AB e CD.
Si ha che

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1-2}{3-1} = -\frac{1}{2}; \qquad m_{CD} = \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \frac{\frac{5}{2} - \frac{7}{2}}{\frac{11}{2} - \frac{7}{2}} = -\frac{1}{2}$$

Dunque, poiché $m_{AB} = m_{CD}$, i due segmenti sono paralleli.

Calcoliamo ora le misure dei due segmenti

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(3-1)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{5}; \qquad |\overrightarrow{CD}| = \sqrt{\left(\frac{11}{2} - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2} - \frac{7}{2}\right)^2} = \sqrt{5}$$

I due segmenti perciò sono congruenti.
Poiché, com'è facile constatare, il verso da A a B del primo segmento è concorde con il verso da C a D del secondo segmento, i due segmenti sono anche equiversi.
Possiamo perciò concludere che essi sono equipollenti e quindi si ha $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.
Calcoliamo le componenti cartesiane di $\overrightarrow{AB}$. Esse sono

$$x_B - x_A = 3 - 1 = 2; \qquad y_B - y_A = 1 - 2 = -1$$

Le componenti cartesiane di $\overrightarrow{CD}$ sono

$$x_D - x_C = \frac{11}{2} - \frac{7}{2} = 2; \qquad y_D - y_C = \frac{5}{2} - \frac{7}{2} = -1$$

Com'è ovvio, le componenti di $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ coincidono, perciò possiamo scrivere

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = (2\,;\,-1)$$

2 Rappresentare con un segmento orientato il vettore $\vec{v}$ di componenti $(-3\,;\,2)$.

Sia $P(-3\,;\,2)$ e $O(0\,;\,0)$. Si ha $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$ (fig. 7).

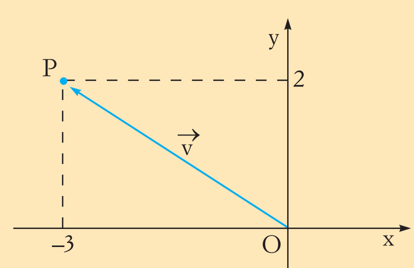


Figura 7

Modulo e direzione di un vettore

9 Sia $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ un vettore di un piano (fig. 8). Per determinare il modulo di $\vec{v}$, possiamo ricorrere alla formula della distanza tra due punti nel piano cartesiano:

$$v = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \qquad (2)$$

Ricordando che le componenti di $\vec{v}$ sono

$$v_x = x_B - x_A\ ; \quad v_y = y_B - y_A$$

si ottiene, sostituendo queste nella (2)

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \qquad (3)$$

Questa formula ci consente di calcolare il *modulo* di un vettore di cui siano note le componenti cartesiane.

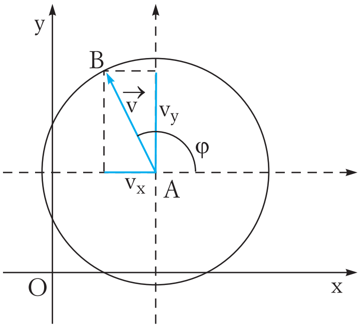


Figura 8

Per determinare l'angolo orientato φ formato dal vettore $\vec{v}$ con la direzione positiva dell'asse delle ascisse, che conveniamo essere compreso tra 0 e 2π, osserviamo ancora la figura 8, da cui, ricordando la definizione di coseno e seno dell'angolo orientato φ, deduciamo che

$$\cos\varphi = \frac{v_x}{v} \qquad \text{sen}\ \varphi = \frac{v_y}{v} \qquad (4)$$

L'angolo φ ci permette di individuare la *direzione e il verso* del vettore $\vec{v}$.
Viceversa, se del vettore $\vec{v}$ sono noti il modulo v e l'angolo φ da esso formato con la direzione positiva dell'asse delle x, dalle (4) possiamo calcolarne le componenti:

$$v_x = v\cos\varphi \qquad v_y = v\ \text{sen}\ \varphi \qquad (5)$$

Infine, osserviamo che le (4) non sono applicabili quando è $v = 0$. Perciò *si conviene di lasciare indeterminati direzione e verso del vettore nullo.*

1 Determinare il modulo del vettore $\vec{v} = (-3\ ; \sqrt{3})$ e l'angolo φ da esso formato con la direzione positiva dell'asse delle x.

Dalla (3) si ha $v = \sqrt{9+3} = 2\sqrt{3}$.

Dalle (4) si ottiene $\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{-3}{2\sqrt{3}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \text{sen}\ \varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \longrightarrow \varphi = 150°$

2 Determinare un vettore $\vec{w}$ di modulo $w = 5$, parallelo ed equiverso al vettore $\vec{v} = (1\ ; -2)$.

Poiché i due vettori $\vec{w}$ e $\vec{v}$ formano con la direzione positiva dell'asse delle ascisse lo stesso angolo φ, dalle (4) otteniamo

$$\cos\varphi = \frac{w_x}{w} = \frac{v_x}{v}; \qquad \text{sen}\ \varphi = \frac{w_y}{w} = \frac{v_y}{v}$$

Poiché è $v = \sqrt{1 + (-2)^2} = \sqrt{5}$, si ha che $\dfrac{w_x}{5} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$; $\dfrac{w_y}{5} = \dfrac{-2}{\sqrt{5}}$, da cui si ricava $w_x = \sqrt{5}$, $w_y = -2\sqrt{5}$. Perciò il vettore cercato è $\vec{w} = (\sqrt{5}\ ; -2\sqrt{5})$.

3 Determinare le componenti del vettore $\vec{v}$ di modulo $5\sqrt{2}$, sapendo che forma, con la direzione positiva dell'asse delle x, un angolo di 225° (fig. 9).

Applicando le (5) si ha

$$v_x = 5\sqrt{2}\ cos\ 225° = 5\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -5$$

$$v_y = 5\sqrt{2}\ sen\ 225° = 5\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -5$$

Perciò $\vec{v} = (-5\ ;\ -5)$.

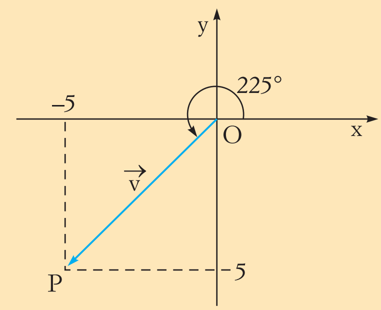


Figura 9

Componenti cartesiane del versore di un vettore dato

10 Se $\vec{v} = (v_x\ ;\ v_y)$ è un vettore del piano xOy, che forma un angolo φ con la direzione positiva dell'asse delle x, il suo versore $\vec{w}$ sarà un vettore di modulo unitario, che forma con l'asse orientato delle x lo stesso angolo φ. Perciò, applicando le (5) del paragrafo precedente con $w = 1$, otteniamo

$$w_x = cos\ \varphi; \qquad w_y = sen\ \varphi \tag{6}$$

Per le (4) del paragrafo precedente, applicate al vettore $\vec{v}$, si ha

$$\frac{v_x}{v} = cos\ \varphi; \qquad \frac{v_y}{v} = sen\ \varphi \tag{7}$$

e quindi, confrontando le (6) con le (7), possiamo concludere che

$$w_x = \frac{v_x}{v}; \qquad w_y = \frac{v_y}{v} \tag{8}$$

cioè: *le componenti cartesiane del versore di un vettore dato sono uguali al rapporto tra le componenti cartesiane omonime di tale vettore e il suo modulo.*

1 Determinare le componenti cartesiane del versore del vettore $\vec{v} = (4\ ;\ -3)$.

Si ha $v = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$. Perciò il versore di $\vec{v}$ ha per componenti $\left(\frac{4}{5}\ ;\ -\frac{3}{5}\right)$.

2 Un vettore $\vec{v}$ ha modulo $v = 13$ e il suo versore è $\vec{w} = \left(-\frac{5}{13}\ ;\ \frac{12}{13}\right)$. Determinare le componenti di $\vec{v}$.

Conoscendo le componenti cartesiane del versore, si conosce $cos\ \varphi = -\frac{5}{13}$ e $sen\ \varphi = \frac{12}{13}$.

Dalle (5) si ha quindi

$$v_x = 13\left(-\frac{5}{13}\right) = -5 \qquad v_y = 13 \cdot \frac{12}{13} = 12$$

Otteniamo così $\vec{v} = (-5\ ;\ 12)$.

Componenti cartesiane di un vettore nello spazio

11 Le considerazioni svolte nei paragrafi precedenti, dal 7 al 10, per i vettori in un piano, si possono facilmente estendere ai vettori nello spazio, in cui sia prefissato un riferimento cartesiano. Naturalmente, per individuare un vettore nello spazio sono necessarie tre componenti: $\vec{v} = (v_x\ ;\ v_y\ ;\ v_z)$.

Riassumiamo i principali risultati, lasciando al lettore il compito di completare le dimostrazioni.

a) *Componenti cartesiane*. Se $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ è un vettore dello spazio, le sue componenti cartesiane saranno $v_x = x_B - x_A$; $v_y = y_B - y_A$; $v_z = z_B - z_A$ ossia

$$\vec{v} = (x_B - x_A\ ;\ y_B - y_A\ ;\ z_B - z_A)$$

b) *Modulo*. Se è $\vec{v} = (v_x\ ;\ v_y\ ;\ v_z)$, il modulo di $\vec{v}$ è $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$.

c) *Versore di un dato vettore*. Detto $\vec{w}$ il versore di un vettore $\vec{v} = (v_x\ ;\ v_y\ ;\ v_z)$, si ha

$$\vec{w} = \left(\frac{v_x}{v}\ ;\ \frac{v_y}{v}\ ;\ \frac{v_z}{v}\right) \tag{9}$$

1 Determinare le componenti e il modulo del vettore $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, essendo $A(-3\ ;\ 5\ ;\ 2)$ e $B(-5\ ;\ 8\ ;\ 1)$.

Si ha $v_x = -5 - (-3) = -2$; $v_y = 8 - 5 = 3$; $v_z = 1 - 2 = -1$.

Perciò è $\vec{v} = (-2\ ;\ 3\ ;\ -1)$ e inoltre $v = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{14}$.

2 Determinare un vettore di modulo 15, parallelo ed equiverso al vettore

$$\vec{v} = (4\ ;\ -1\ ;\ 2\sqrt{2})$$

Dai dati del problema, detto $\vec{u}$ il vettore da determinare, si ha

$$u = 15 \quad \text{e} \quad v = \sqrt{4^2 + (-1)^2 + (2\sqrt{2})^2} = 5$$

Inoltre essendo $\vec{u}$ e $\vec{v}$ paralleli ed equiversi, per la (9) avremo

$$\frac{v_x}{v} = \frac{u_x}{u}, \quad \frac{v_y}{v} = \frac{u_y}{u}, \quad \frac{v_z}{v} = \frac{u_z}{u} \qquad \text{cioè} \qquad \frac{4}{5} = \frac{u_x}{15}, \quad -\frac{1}{5} = \frac{u_y}{15}, \quad \frac{2\sqrt{2}}{5} = \frac{u_z}{15}$$

da cui

$$u_x = 12, \quad u_y = -3, \quad u_z = 6\sqrt{2}$$

Pertanto il vettore cercato è $\vec{u} = (12\ ;\ -3\ ;\ 6\sqrt{2})$.

3 Determinare il versore $\vec{w}$ del vettore $\vec{v} = (-\sqrt{2}\ ;\ -\sqrt{5}\ ;\ 3)$.

Poiché è $v = \sqrt{2 + 5 + 9} = 4$, il versore di $\vec{v}$ risulta

$$\vec{w} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\ ;\ -\frac{\sqrt{5}}{4}\ ;\ \frac{3}{4}\right)$$

Le operazioni algebriche con i vettori

Somma

12 Dati due vettori $\vec{v}\,'$ e $\vec{v}\,''$, è sempre possibile rappresentarli mediante due segmenti orientati in modo che il secondo estremo del primo segmento coincida con il primo estremo del secondo (fig. 10)

$$\vec{v}\,' = \overrightarrow{AB}; \qquad \vec{v}\,'' = \overrightarrow{BC}$$

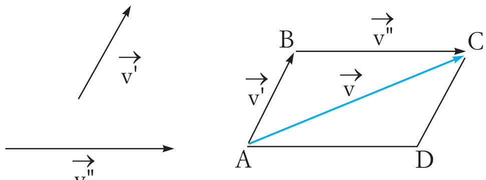


Figura 10

Vettori — *TEORIA*

Resta così definito un terzo vettore $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, che dipende da $\vec{v}\,'$ e $\vec{v}\,''$ e che si dice **somma** dei due vettori dati

$$\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{v}\,''$$

Come possiamo osservare dalla figura 10, per fare la somma di due vettori dati, $\vec{v}\,'$ e $\vec{v}\,''$, possiamo applicare la seguente **regola del parallelogrammo**: rappresentiamo i due vettori mediante due segmenti orientati aventi la stessa origine A

$$\vec{v}\,' = \overrightarrow{AB}; \qquad \vec{v}\,'' = \overrightarrow{AD}$$

Completiamo quindi il parallelogrammo individuato dai due segmenti AB e AD. La diagonale AC del parallelogrammo $ABCD$ rappresenta il vettore somma $\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{v}\,''$.

Se $\vec{v}\,'$ e $\vec{v}\,''$ sono due vettori del piano noti mediante le loro componenti cartesiane (fig. 11), sappiamo che è possibile rappresentarli con due segmenti orientati

$$\vec{v}\,' = \overrightarrow{OA} \quad \text{e} \quad \vec{v}\,'' = \overrightarrow{OC}$$

aventi il primo estremo nell'origine degli assi cartesiani, dove $A(v'_x\,;\,v'_y)$ e $C(v''_x\,;\,v''_y)$. Per determinare le componenti v_x e v_y del vettore somma $\vec{v}$, calcoliamo $\vec{v}\,' + \vec{v}\,''$ con la regola del parallelogrammo. Poiché OA e CB sono segmenti paralleli e congruenti, saranno congruenti anche le loro proiezioni sull'asse delle ascisse: $OA_1 \cong C_1B_1$. Perciò (fig. 11)

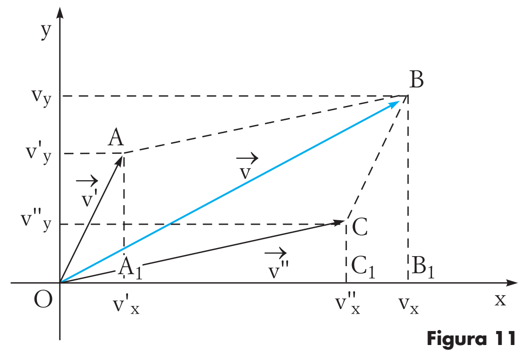


Figura 11

$$OB_1 = OC_1 + C_1B_1 \cong OC_1 + OA_1 \longrightarrow v_x = v'_x + v''_x$$

Analogamente si può dimostrare che $v_y = v'_y + v''_y$.

Dunque si ha che

$$(v'_x\,;\,v'_y) + (v''_x\,;\,v''_y) = (v'_x + v''_x\,;\,v'_y + v''_y) \tag{1}$$

Conclusioni del tutto analoghe si ottengono anche nel caso in cui $\vec{v}\,'$ e $\vec{v}\,''$ siano vettori dello spazio

$$(v'_x\,;\,v'_y\,;\,v'_z) + (v''_x\,;\,v''_y\,;\,v''_z) = (v'_x + v''_x\,;\,v'_y + v''_y\,;\,v'_z + v''_z) \tag{2}$$

Riassumendo: *le componenti cartesiane della somma di due vettori (del piano o dello spazio) sono la somma delle componenti corrispondenti dei due vettori dati.*
Infine, rileviamo che, come il lettore può facilmente verificare, la somma di un qualsiasi vettore con il vettore nullo è uguale al vettore dato:

$$\vec{v} + \mathbf{0} = \vec{v}$$

Dunque, *il vettore nullo* non muta i vettori con cui viene sommato: esso *è l'elemento neutro rispetto alla somma tra vettori.*

Osservazione. In fisica la somma di due o più vettori che rappresentano delle forze è detta **risultante**. L'applicazione di due o più forze a un punto materiale produce lo stesso effetto dell'applicazione, a quel punto, di una sola forza, uguale alla risultante delle forze date.
È evidente che, considerando la risultante anziché le singole forze, risulta notevolmente semplificato lo studio di molte situazioni.

ALGEBRA LINEARE

TEORIA

1 $\vec{v}\,'$ e $\vec{v}\,''$ sono due vettori del piano. È $\vec{v}\,' = (1\,;\,\sqrt{3})$, mentre $\vec{v}\,''$ ha modulo $2\sqrt{3}$ e forma con la direzione positiva dell'asse delle x un angolo di 150°. Determinare modulo, direzione e verso di $\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{v}\,''$.

Calcoliamo per prima cosa le componenti di $\vec{v}\,''$. Si ha

$$v''_x = 2\sqrt{3}\,\cos 150° = -3; \qquad v''_y = 2\sqrt{3}\,\operatorname{sen} 150° = \sqrt{3}$$

e quindi $\vec{v}\,'' = (-3\,;\,\sqrt{3})$.

Perciò $\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{v}\,'' = (1-3\,;\,\sqrt{3}+\sqrt{3}) = (-2\,;\,2\sqrt{3})$.

Dunque $v = \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4$.

Per determinare direzione e verso di $\vec{v}$, calcoliamo l'angolo φ da esso formato con il semiasse positivo delle ascisse; si ha $\cos\varphi = \dfrac{-2}{4} = -\dfrac{1}{2}$ e $\operatorname{sen}\varphi = \dfrac{2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Quindi è $\varphi = 120°$.

2 Siano $\vec{v}\,' = (-5\,;\,3\,;\,-1)$ e $\vec{v}\,'' = (3\,;\,-1\,;\,-1)$. Determinare un vettore $\vec{v}$ tale che

$$\vec{v} + \vec{v}\,' = \vec{v}\,''$$

Si avrà $v_x + (-5) = 3$, $v_y + 3 = -1$, $v_z + (-1) = -1$, da cui $v_x = 8$, $v_y = -4$, $v_z = 0$.
Il vettore cercato è perciò $\vec{v} = (8\,;\,-4\,;\,0)$.

Modulo della somma di due vettori

13 Se $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sono due vettori le cui rette formano tra loro un angolo convesso φ, è possibile calcolare il modulo della loro somma. Siano (fig. 12)

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB}, \quad \vec{w} = \overrightarrow{AD}, \quad \vec{v} + \vec{w} = \overrightarrow{AC} \tag{3}$$

dove AC è la diagonale del parallelogrammo individuato dai segmenti AB e AD.
Detto ψ l'angolo $A\widehat{B}C$, essendo φ e ψ angoli coniugati interni formati da rette parallele tagliate da una trasversale, si ha $\psi = 180° - \varphi$. Applicando il teorema di Carnot al triangolo ABC, si ottiene

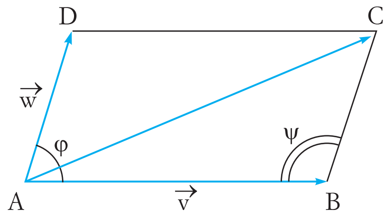


Figura 12

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{AB}\cdot\overline{BC}\cdot\cos\psi$$

da cui, essendo $\cos\psi = \cos(180° - \varphi) = -\cos\varphi$, $BC \cong AD$, si ha, tenendo presente le (3),

$$|\vec{v} + \vec{w}|^2 = v^2 + w^2 + 2vw\cos\varphi \tag{4}$$

cioè

$$|\vec{v} + \vec{w}| = \sqrt{v^2 + w^2 + 2vw\cos\varphi}$$

1 I vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ formano un angolo di 45° e i loro moduli sono $a = 3$, $b = \sqrt{2}$. Calcolare il modulo della loro somma.

Applicando la (4), si ha subito

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = 3^2 + (\sqrt{2})^2 + 2\cdot 3\cdot\sqrt{2}\,\cos 45° = 9 + 2 + 6\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2} = 17$$

Perciò $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{17}$.

Vettori

TEORIA

2 Due vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$ hanno modulo, rispettivamente, $v = \sqrt{3}$, $w = 7$ e il modulo della loro somma è $\sqrt{73}$. Determinare l'angolo formato da $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

Dalla (4) si ha $\sqrt{73}^2 = \sqrt{3}^2 + 7^2 + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 7 \cos\varphi$, da cui si ricava

$$\cos\varphi = \frac{73 - 52}{14\sqrt{3}} \longrightarrow \cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \longrightarrow \varphi = 30°$$

Prodotto di un vettore per uno scalare

14 Sia $\vec{v}$ un vettore e α un numero reale (cioè uno scalare; si veda il paragrafo 2).

D Definiamo **prodotto del vettore $\vec{v}$ per lo scalare** α, e lo indichiamo con $\alpha\vec{v}$, il vettore che ha la stessa direzione di $\vec{v}$, per modulo $|\alpha|v$ e per verso quello di $\vec{v}$ o quello opposto, secondo che α sia positivo o negativo.

Sia $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$ un vettore del piano xOy e $\vec{v}\,' = \alpha\vec{v} = \overrightarrow{OQ}$. Supposto $\alpha > 0$, si avrà, in base alla definizione appena data,

$$v' = \alpha v \tag{5}$$

Dette H e K, rispettivamente, le proiezioni ortogonali sull'asse delle x dei punti P e Q (fig. 13), i due triangoli rettangoli OHP e OKQ risultano simili e quindi

$$\frac{OK}{OQ} = \frac{OH}{OP} \longrightarrow \frac{v'_x}{v'} = \frac{v_x}{v}$$

Da quest'ultima uguaglianza, tenendo conto della (5), si ottiene

$$v'_x = \frac{\alpha\, v\, v_x}{v} \longrightarrow v'_x = \alpha\, v_x$$

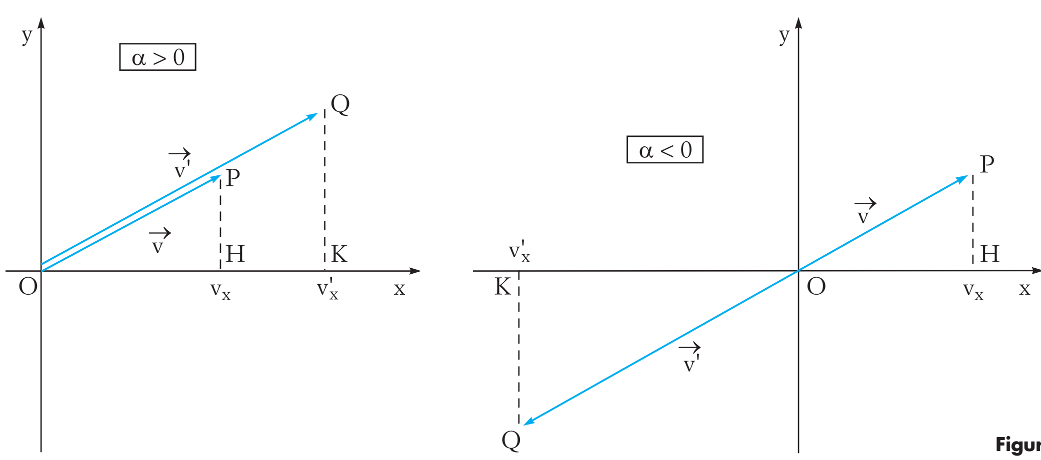


Figura 13

Analogamente, sarà

$$\frac{KQ}{OQ} = \frac{HP}{OP} \longrightarrow v'_y = \alpha\, v_y$$

Il lettore può dimostrare, per esercizio, che le relazioni ricavate sono valide anche nel caso in cui sia $\alpha < 0$. Se fosse $\alpha = 0$, il vettore $\alpha\vec{v}$, dovendo avere modulo nullo, coinciderebbe con il vettore nullo.
Le conclusioni ottenute si possono estendere anche ai vettori nello spazio.

Possiamo perciò affermare che *le componenti del prodotto di un vettore* $\vec{v}$ *per uno scalare* α *sono uguali alle componenti di* $\vec{v}$ *moltiplicate per* α

$$\begin{gathered}\alpha(v_x\,;\,v_y)=(\alpha v_x\,;\,\alpha v_y)\\ \alpha(v_x\,;\,v_y\,;\,v_z)=(\alpha v_x\,;\,\alpha v_y\,;\,\alpha v_z)\end{gathered}\tag{6}$$

Sia $\vec{v}$ un vettore e $\vec{w}$ il suo versore. Le relazioni tra le componenti di un vettore e quelle del suo versore (paragrafi 10 e 11) si possono così riscrivere

$$\vec{w}=\left(\frac{v_x}{v}\,;\,\frac{v_y}{v}\right)=\frac{1}{v}(v_x\,;\,v_y)=\frac{1}{v}\vec{v}\longrightarrow\vec{v}=v\vec{w}$$

Quindi *il versore di un vettore dato si ottiene moltiplicando questo per il reciproco del suo modulo* e quindi, *ogni vettore è uguale al prodotto del suo modulo per il suo versore.*

1 Sia $\vec{v}=\left(3\,;\,-7\,;\,\frac{5}{4}\right)$. Determinare il vettore $-2\vec{v}$.

Si ha $-2\vec{v}=\left(-2\cdot 3\,;\,(-2)\cdot(-7)\,;\,(-2)\cdot\frac{5}{4}\right)=\left(-6\,;\,14\,;\,-\frac{5}{2}\right)$.

2 Sia $\vec{v}=(-\sqrt{5}\,;\,5\,;\,-\sqrt{10})$. Determinare il versore $\vec{w}$ di $\vec{v}$ ed esprimere quindi $\vec{v}$ come prodotto del suo versore per uno scalare.

Si ha $v=\sqrt{5+25+10}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$.

Perciò

$$\vec{w}=\frac{1}{v}\vec{v}=\left(-\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{10}}\,;\,\frac{5}{2\sqrt{10}}\,;\,-\frac{\sqrt{10}}{2\sqrt{10}}\right)\longrightarrow\vec{w}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\,;\,\frac{\sqrt{10}}{4}\,;\,-\frac{1}{2}\right)$$

Si avrà quindi $\vec{v}=v\cdot\vec{w}=2\sqrt{10}\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\,;\,\frac{\sqrt{10}}{4}\,;\,-\frac{1}{2}\right)$, ritrovando così

$$\vec{v}=(-\sqrt{5}\,;\,5\,;\,-\sqrt{10})$$

Proprietà delle operazioni con i vettori

15 Le operazioni fin qui definite godono delle seguenti proprietà. Siano $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ tre vettori qualsiasi e α, β due generici numeri reali:

1. **proprietà commutativa della somma**

$$\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$$

2. **proprietà associativa della somma**

$$\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})=(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}$$

3. **proprietà associativa del prodotto di un vettore per uno scalare**

$$(\alpha\beta)\vec{v}=\alpha(\beta\vec{v})$$

4. **proprietà distributiva del prodotto della somma di scalari per un vettore**

$$(\alpha+\beta)\vec{v}=\alpha\vec{v}+\beta\vec{v}$$

5. **proprietà distributiva del prodotto di uno scalare per la somma di vettori**

$$\alpha(\vec{u}+\vec{v})=\alpha\vec{u}+\alpha\vec{v}$$

Tali proprietà si possono facilmente dimostrare ricorrendo alle componenti cartesiane dei vettori. In tal modo esse divengono delle immediate conseguenze delle proprietà delle operazioni tra numeri reali. Dimostriamo, a titolo di esempio, l'ultima delle proprietà enunciate, per i vettori di un piano.

Siano $\vec{u} = (u_x\,;\,u_y)$ e $\vec{v} = (v_x\,;\,v_y)$. È allora

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_x + v_x\,;\,u_y + v_y)$$
$$\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = (\alpha(u_x + v_x)\,;\,\alpha(u_y + v_y))$$

cioè

$$\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = (\alpha u_x + \alpha v_x\,;\,\alpha u_y + \alpha v_y) \tag{7}$$

D'altra parte si ha

$$\alpha\vec{u} = (\alpha u_x\,;\,\alpha u_y) \quad \text{e} \quad \alpha\vec{v} = (\alpha v_x\,;\,\alpha v_y)$$

da cui

$$\alpha\vec{u} + \alpha\vec{v} = (\alpha u_x + \alpha v_x\,;\,\alpha u_y + \alpha v_y) \tag{8}$$

Confrontando la (7) con la (8), otteniamo

$$\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v} \qquad \text{c.v.d.}$$

Verificare che

$$\alpha[\beta(\vec{v}\,' + \vec{v}\,'') + \gamma\vec{v}\,'] = (\alpha(\beta+\gamma))\vec{v}\,' + (\alpha\beta)\vec{v}\,''$$

Si ha infatti, per le proprietà 5 e 1,

$$\alpha[\beta(\vec{v}\,' + \vec{v}\,'') + \gamma\vec{v}\,'] = \alpha(\beta\vec{v}\,' + \beta\vec{v}\,'' + \gamma\vec{v}\,') = \alpha(\beta\vec{v}\,' + \gamma\vec{v}\,' + \beta\vec{v}\,'')$$

Per la proprietà simmetrica dell'uguaglianza applicata alla proprietà 4, si ha

$$\alpha(\beta\vec{v}\,' + \gamma\vec{v}\,' + \beta\vec{v}\,'') = \alpha[(\beta+\gamma)\vec{v}\,' + \beta\vec{v}\,'']$$

Infine, ancora per la proprietà 5 e per la 3, letta da destra verso sinistra, si ha

$$\alpha[(\beta+\gamma)\vec{v}\,' + \beta\vec{v}\,''] = \alpha[(\beta+\gamma)\vec{v}\,'] + \alpha(\beta\vec{v}\,'') = (\alpha(\beta+\gamma))\vec{v}\,' + (\alpha\beta)\vec{v}\,''$$

Per la proprietà transitiva dell'uguaglianza, concludiamo che è

$$\alpha[\beta(\vec{v}\,' + \vec{v}\,'') + \gamma\vec{v}\,'] = (\alpha(\beta+\gamma))\vec{v}\,' + (\alpha\beta)\vec{v}\,''$$

e la relazione data risulta così verificata.

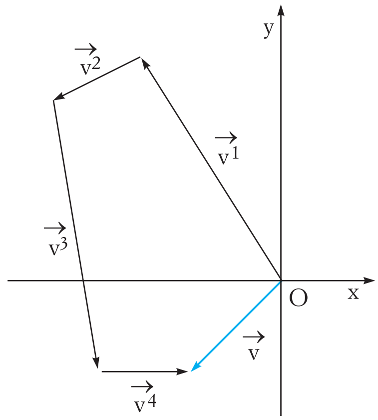
Possiamo concludere che se dobbiamo sommare più vettori dati, applicando successivamente la regola del parallelogrammo, per ottenere il vettore somma basta riportare dall'estremo del primo vettore un segmento equipollente al secondo, dall'estremo del vettore così ottenuto un segmento equipollente al terzo e così via fino a esaurire tutti i vettori dati. A questo punto, congiungendo l'origine del primo vettore dato con l'estremo dell'ultimo vettore ottenuto, otteniamo il vettore risultante richiesto.

Osservazione sulle proprietà commutativa e associativa della somma

16 Notiamo che, grazie alla proprietà associativa, possiamo indicare la somma di tre o più vettori senza far uso di parentesi: in virtù di tale proprietà non v'è pericolo di ambiguità. Inoltre, per la proprietà commutativa, possiamo mutare a nostro piacere l'ordine dei vettori da sommare, senza influire sul risultato.

Perciò *la somma di un numero qualsiasi di vettori si può eseguire considerando i vettori da sommare in qualunque ordine e associandoli in qualunque modo.*

Osserviamo che la situazione è del tutto analoga a quella che si presenta con le operazioni aritmetiche di somma e prodotto.
Inoltre, come si può facilmente verificare, le componenti della somma di più vettori sono la somma delle componenti corrispondenti di ciascun vettore.



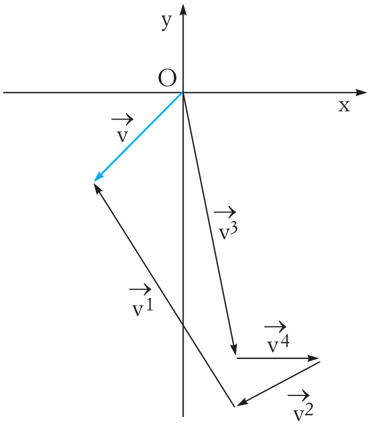


Figura 14

Infine, volendo rappresentare geometricamente la somma di più vettori, si può facilmente generalizzare il procedimento descritto all'inizio del paragrafo 12 (si veda la figura 14 dalla quale si può anche constatare che vale, per la somma di vettori, la proprietà commutativa: $\vec{v} = \vec{v}^{\,1} + \vec{v}^{\,2} + \vec{v}^{\,3} + \vec{v}^{\,4} = \vec{v}^{\,3} + \vec{v}^{\,4} + \vec{v}^{\,2} + \vec{v}^{\,1}$).

Siano $\vec{v}^{\,1} = (-3\,;\,5)$, $\vec{v}^{\,2} = (-2\,;\,-1)$, $\vec{v}^{\,3} = (1\,;\,-6)$, $\vec{v}^{\,4} = (2\,;\,0)$.
Calcolare $\vec{v} = \vec{v}^{\,1} + \vec{v}^{\,2} + \vec{v}^{\,3} + \vec{v}^{\,4}$.
Si ha $\quad \vec{v} = \vec{v}^{\,1} + \vec{v}^{\,2} + \vec{v}^{\,3} + \vec{v}^{\,4} = (-3-2+1+2\,;\,5-1-6+0) = (-2\,;\,-2)$

Verificare poi sia algebricamente, sia graficamente che, per esempio, come è stato fatto nella figura 14, si ha $\vec{v}^{\,1} + \vec{v}^{\,2} + \vec{v}^{\,3} + \vec{v}^{\,4} = \vec{v}^{\,3} + \vec{v}^{\,4} + \vec{v}^{\,2} + \vec{v}^{\,1}$

Vettore opposto

17 **D** Chiamiamo **vettore opposto** di un vettore $\vec{v}$, e lo indichiamo con $-\vec{v}$, il vettore che ha modulo e direzione uguali a quelli di $\vec{v}$, ma verso opposto (fig. 15).

Se $\vec{v} = \overrightarrow{OA}$ e $-\vec{v} = \overrightarrow{OB}$, è ovvio che il punto B sarà il simmetrico, rispetto a O, del punto A. Perciò le componenti di $-\vec{v}$ sono opposte alle corrispondenti componenti di $\vec{v}$. In particolare, se $v = (v_x\,;\,v_y)$ è un vettore del piano, si ha

$$-\vec{v} = (-v_x\,;\,-v_y) \tag{9}$$

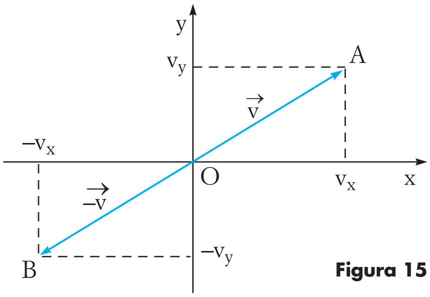


Figura 15

mentre, se $\vec{v} = (v_x\,;\,v_y\,;\,v_z)$ è un vettore dello spazio, si ha

$$-\vec{v} = (-v_x\,;\,-v_y\,;\,-v_z) \tag{10}$$

È immediato verificare che la somma di un vettore con il suo opposto è il vettore nullo

$$\vec{v} + (-\vec{v}) = \mathbf{0} \tag{11}$$

Infine, osserviamo che l'opposto del vettore nullo è il vettore nullo stesso

$$-\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

Vettori

TEORIA

Differenza di vettori

18 D La **differenza** tra due vettori è la somma del primo con l'opposto del secondo

$$\vec{v}\,' - \vec{v}\,'' = \vec{v}\,' + (-\vec{v}\,'') \tag{12}$$

Se $\vec{v}\,'$ e $\vec{v}\,''$ sono espressi mediante le loro componenti cartesiane, la loro differenza è un vettore le cui componenti sono le differenze delle componenti corrispondenti di $\vec{v}\,'$ e $\vec{v}\,''$.
Infatti dalla (12), tenendo conto della (9), si ha

$$\vec{v}\,' - \vec{v}\,'' = (v'_x\,;\, v'_y) + (-v''_x\,;\, -v''_y)$$

cioè

$$\vec{v}\,' - \vec{v}\,'' = (v'_x - v''_x\,;\, v'_y - v''_y)$$

Analogamente si ha, se $\vec{v}\,'$ e $\vec{v}\,''$ sono vettori dello spazio,

$$\vec{v}\,' - \vec{v}\,'' = (v'_x - v''_x\,;\, v'_y - v''_y\,;\, v'_z - v''_z)$$

Se è $\vec{v} = \vec{v}\,' - \vec{v}\,''$, tenendo conto della (12) e sommando poi a entrambi i membri il vettore $\vec{v}\,''$, otteniamo

$$\vec{v} = \vec{v}\,' + (-\vec{v}\,'') \longrightarrow \vec{v} + \vec{v}\,'' = \vec{v}\,' + (-\vec{v}\,'') + \vec{v}\,''$$

ossia, per la (11) e ricordando che il vettore nullo è l'elemento neutro rispetto alla somma, otteniamo

$$\vec{v} + \vec{v}\,'' = \vec{v}\,' + \mathbf{0} \longrightarrow \vec{v} + \vec{v}\,'' = \vec{v}\,' \tag{13}$$

La (13) si può così interpretare: *la differenza di due vettori è un vettore che, sommato al secondo, dà come risultato il primo vettore.*

Questa considerazione ci permette un'altra costruzione del vettore $\vec{v} = \vec{v}\,' - \vec{v}\,''$.
Siano $\vec{v}\,' = \overrightarrow{OA}$ e $\vec{v}\,'' = \overrightarrow{OB}$ (fig. 16) i due vettori di cui si deve determinare la differenza. Congiungiamo B con A e consideriamo il vettore $\overrightarrow{BA}$: esso risulta la differenza $\vec{v}$ dei due vettori $\vec{v}\,'$ e $\vec{v}\,''$.
Infatti, com'è evidente, la somma del vettore $\overrightarrow{OB}$ con il vettore $\overrightarrow{BA}$ dà il vettore $\overrightarrow{OA}$ (cioè $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA}$) e quindi si ha

$$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA} \longrightarrow \vec{v}\,' - \vec{v}\,'' = \overrightarrow{BA}$$

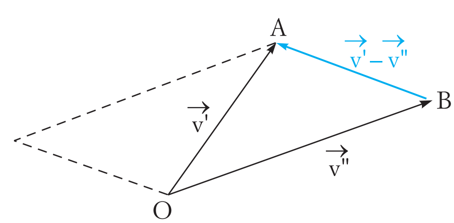


Figura 16

1 Siano $\vec{v}\,' = (-5\,;\, 3\,;\, 0)\,;\ \vec{v}\,'' = (-1\,;\, 3\,;\, -2)$. Determinare $\vec{v}\,' - \vec{v}\,''$.

Si ha $\vec{v}\,' - \vec{v}\,'' = (-5 - (-1)\,;\, 3 - 3\,;\, 0 - (-2))$ cioè $\vec{v}\,' - \vec{v}\,'' = (-4\,;\, 0\,;\, 2)$.

2 Sia $\vec{v}\,' = (15\,;\, -3)$ e $\vec{v}\,'' = (3\,;\, 28)$. Determinare un vettore $\vec{v}$ tale che $\vec{v}\,' - \vec{v} = \vec{v}\,''$.

Si avrà $15 - v_x = 3$ e $-3 - v_y = 28$ da cui $v_x = 12$ e $v_y = -31$. Il vettore cercato è perciò $\vec{v} = (12\,;\, -31)$.

Versori fondamentali

19 Vogliamo introdurre un utile strumento per la rappresentazione dei vettori: i versori fondamentali. Limitiamoci dapprima a considerare i vettori di un piano, in cui sia prefissato un riferimento cartesiano. Sia $\vec{\mathbf{x}}$ un versore avente la stessa direzione e lo stesso verso dell'asse delle ascisse e $\vec{\mathbf{y}}$ un versore avente la stessa direzione e lo stesso verso dell'asse delle ordinate (fig. 17).

Com'è ovvio, adoperando le componenti cartesiane di $\vec{\mathbf{x}}$ e $\vec{\mathbf{y}}$ risulta

$$\vec{\mathbf{x}} = (1\,;\,0), \qquad \vec{\mathbf{y}} = (0\,;\,1) \tag{14}$$

I versori $\vec{\mathbf{x}}$ e $\vec{\mathbf{y}}$ così definiti si chiamano **versori fondamentali del piano**.
Sia $\vec{v} = (v_x\,;\,v_y)$ un qualsiasi vettore del piano e siano $\vec{v}_x = (v_x\,;\,0)$, $\vec{v}_y = (0\,;\,v_y)$ i vettori componenti di $\vec{v}$ secondo, rispettivamente, l'asse x e l'asse y.
Osserviamo che è $\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y$; infatti, per quanto visto nel paragrafo 12 a proposito delle componenti cartesiane della somma di due vettori, si può scrivere

$$\vec{v}_x + \vec{v}_y = (v_x\,;\,0) + (0\,;\,v_y) = (v_x + 0\,;\,0 + v_y) = (v_x\,;\,v_y) = \vec{v}$$

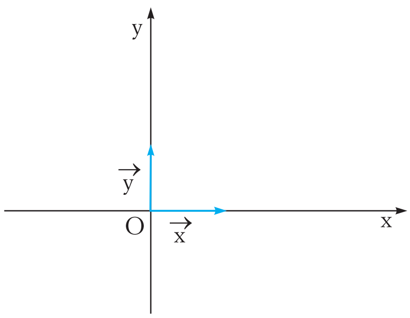


Figura 17

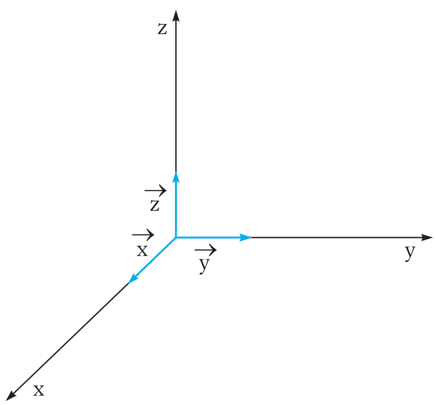


Figura 18

Quindi, essendo $\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y$, si ha

$$\vec{v} = (v_x\,;\,0) + (0\,;\,v_y) = (v_x \cdot 1\,;\,v_x \cdot 0) + (v_y \cdot 0\,;\,v_y \cdot 1)$$

e, per la (6), letta da destra verso sinistra, risulta quindi

$$\vec{v} = v_x(1\,;\,0) + v_y(0\,;\,1)$$

e cioè, per le (14),

$$\vec{v} = v_x\vec{\mathbf{x}} + v_y\vec{\mathbf{y}} \tag{15}$$

Consideriamo ora i vettori dello spazio. Fissato un riferimento cartesiano nello spazio, siano $\vec{\mathbf{x}}$ e $\vec{\mathbf{y}}$ due versori definiti come nel caso precedente e sia $\vec{\mathbf{z}}$ un versore avente la stessa direzione e lo stesso verso dell'asse z (fig. 18).
Utilizzando le componenti cartesiane di $\vec{\mathbf{x}}$, $\vec{\mathbf{y}}$, $\vec{\mathbf{z}}$, si ha

$$\vec{\mathbf{x}} = (1\,;\,0\,;\,0), \quad \vec{\mathbf{y}} = (0\,;\,1\,;\,0), \quad \vec{\mathbf{z}} = (0\,;\,0\,;\,1) \tag{16}$$

I versori $\vec{\mathbf{x}}$, $\vec{\mathbf{y}}$, $\vec{\mathbf{z}}$ così definiti si chiamano **versori fondamentali dello spazio**.

Sia ora $\vec{v} = (v_x\,;\, v_y\,;\, v_z)$ un qualsiasi vettore dello spazio. Si ha che

$$\vec{v} = (v_x\,;\, v_y\,;\, v_z) = (v_x\,;\, 0\,;\, 0) + (0\,;\, v_y\,;\, 0) + (0\,;\, 0\,;\, v_z) =$$
$$= v_x(1\,;\, 0\,;\, 0) + v_y(0\,;\, 1\,;\, 0) + v_z(0\,;\, 0\,;\, 1) = v_x\vec{\mathbf{x}} + v_y\vec{\mathbf{y}} + v_z\vec{\mathbf{z}}$$

cioè

$$\boxed{\vec{v} = v_x\vec{\mathbf{x}} + v_y\vec{\mathbf{y}} + v_z\vec{\mathbf{z}}} \tag{17}$$

La (15) e la (17) si possono così esprimere: *qualsiasi vettore può essere espresso come combinazione lineare dei versori fondamentali.*

Si noti che, grazie all'introduzione dei versori fondamentali, l'espressione (17) può essere utilizzata per indicare un generico vettore, senza specificare se si tratta di un vettore del piano o dello spazio: basterà ricordare che se $\vec{v}$ è un vettore del piano sarà necessariamente $v_z = 0$.

1 Esprimere ciascuno dei vettori

$$\vec{v}^{\,1} = (5\,;\, 3), \quad \vec{v}^{\,2} = (-3\,;\, 1), \quad \vec{v}^{\,3} = (0\,;\, 6), \quad \vec{v}^{\,4} = (-\sqrt{2}\,;\, 0)$$

come combinazione lineare dei versori fondamentali.
Si ha

$$\vec{v}^{\,1} = 5\vec{\mathbf{x}} + 3\vec{\mathbf{y}}, \quad \vec{v}^{\,2} = -3\vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{y}}, \quad \vec{v}^{\,3} = 6\vec{\mathbf{y}}, \quad \vec{v}^{\,4} = -\sqrt{2}\vec{\mathbf{x}}$$

2 Esprimere i vettori

$$\vec{v}^{\,1} = (3\,;\, -5\,;\, -\sqrt{5}), \quad \vec{v}^{\,2} = (0\,;\, -3\,;\, 2), \quad \vec{v}^{\,3} = (0\,;\, 6\,;\, 0)$$

come combinazione lineare dei versori fondamentali.
Si ha

$$\vec{v}^{\,1} = 3\vec{\mathbf{x}} - 5\vec{\mathbf{y}} - \sqrt{5}\,\vec{\mathbf{z}}, \quad \vec{v}^{\,2} = -3\vec{\mathbf{y}} + 2\vec{\mathbf{z}}, \quad \vec{v}^{\,3} = 6\vec{\mathbf{y}}$$

3 Siano $\vec{u} = -\vec{\mathbf{x}} + 2\vec{\mathbf{y}} - 3\vec{\mathbf{z}}$, $\vec{v} = 5\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{y}}$, $\vec{w} = 2\vec{\mathbf{y}} + 6\vec{\mathbf{z}}$. Calcolare $2\vec{u} - 3\vec{v} + \vec{w}$

Si ha

$$2\vec{u} - 3\vec{v} + \vec{w} = 2(-\vec{\mathbf{x}} + 2\vec{\mathbf{y}} - 3\vec{\mathbf{z}}) - 3(5\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{y}}) + 2\vec{\mathbf{y}} + 6\vec{\mathbf{z}} =$$
$$= -2\vec{\mathbf{x}} + 4\vec{\mathbf{y}} - 6\vec{\mathbf{z}} - 15\vec{\mathbf{x}} + 3\vec{\mathbf{y}} + 2\vec{\mathbf{y}} + 6\vec{\mathbf{z}} = -17\vec{\mathbf{x}} + 9\vec{\mathbf{y}}$$

Si noti che nell'esempio 3 i calcoli sono stati svolti applicando le stesse regole dell'ordinario calcolo letterale. Grazie ai versori fondamentali, un'*espressione vettoriale*, ossia un'espressione in cui siano indicate le operazioni di somma e differenza tra vettori e il prodotto di un vettore per uno scalare, può essere trattata con le note tecniche del calcolo letterale.

Prodotto scalare tra due vettori

Definizione di prodotto scalare

20 Vogliamo ora definire il prodotto scalare tra due vettori; esso differisce sostanzialmente dalle operazioni fin qui incontrate. Si tratta infatti di un'operazione il cui risultato non appartiene all'insieme dei vettori, ma è un numero reale. Il prodotto scalare, quindi, non è un'operazione interna nell'insieme dei vettori.

D Si dice **prodotto scalare** di due vettori $\vec{v}$, $\vec{w}$ e si indica con

$$\vec{v} \cdot \vec{w}$$

(si legge "v scalare w") il numero reale che si ottiene moltiplicando il prodotto dei moduli dei due vettori per il coseno dell'angolo convesso φ da essi formato

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = vw \cos \varphi \qquad (1)$$

Si noti che in alcuni testi il prodotto scalare tra $\vec{v}$ e $\vec{w}$ è indicato con $\vec{v} \times \vec{w}$.
Poiché è $v\ w \cos \varphi = v(w \cos \varphi) = w(v \cos \varphi)$, ricordando quanto detto nel paragrafo 6, si potrà anche dire che *il prodotto scalare di due vettori è uguale al prodotto del modulo di uno di essi per la componente dell'altro vettore rispetto al primo.*
Osservando la (1), possiamo affermare quanto segue.

- Il prodotto scalare di due vettori non nulli è positivo se e solo se l'angolo φ da essi formato è acuto (infatti è in tal caso $\cos \varphi > 0$).
- Il prodotto scalare tra due vettori non nulli è negativo se e solo se l'angolo φ da essi formato è ottuso (perché allora si ha $\cos \varphi < 0$).
- Il prodotto scalare tra due vettori non nulli è nullo se e solo se i due vettori sono perpendicolari (è infatti $\varphi = 90°$ e quindi $\cos \varphi = 0$).

Inoltre *il prodotto scalare tra due vettori paralleli ed equiversi è uguale al prodotto dei loro moduli*. Infatti in tal caso si ha $\varphi = 0$, cioè $\cos \varphi = 1$, e quindi $vw \cos \varphi = vw$.
In particolare *il prodotto scalare di un vettore per se stesso è il quadrato del suo modulo*

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = v^2$$

Concludiamo osservando che, essendo $-1 \leq \cos \varphi \leq 1$, dalla (1) si ha

$$-vw \leq \vec{v} \cdot \vec{w} \leq vw$$

La prima uguaglianza, $\vec{v} \cdot \vec{w} = -vw$, può valere solo se $\cos \varphi = -1 \longrightarrow \varphi = 180°$, cioè se i due vettori hanno direzioni parallele e versi opposti. La seconda uguaglianza, $\vec{v} \cdot \vec{w} = vw$, può valere solo se $\cos \varphi = 1 \longrightarrow \varphi = 0°$, cioè se i due vettori sono paralleli ed equiversi.

1 I vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$ formano un angolo di 60° ed è $v = 2$, $w = 3$. Calcolare il loro prodotto scalare.
Si ha $\vec{v} \cdot \vec{w} = 2 \cdot 3 \cdot \cos 60° = 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 3$.

2 I due vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$ hanno moduli, rispettivamente, $\sqrt{3}$ e 3 e il loro prodotto scalare vale $-\frac{9}{2}$. Determinare l'angolo da essi formato.
Dalla (1) si ha $\cos \varphi = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{v \cdot w}$, cioè $\cos \varphi = \frac{-\frac{9}{2}}{\sqrt{3} \cdot 3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ricordando che per angolo tra due vettori si intende l'*angolo convesso* formato dalle loro rette, si ha $\varphi = 150°$.

Osservazione. Il prodotto scalare ha notevoli applicazioni in fisica. Accenniamo a una tra le più importanti: il *lavoro* compiuto da una forza $\vec{F}$, quando il suo punto d'applicazione subisce uno spostamento $\vec{S}$, è dato dal prodotto scalare $\vec{F} \cdot \vec{S}$.

Vettori

TEORIA

Proprietà del prodotto scalare

21 Il prodotto scalare tra vettori gode delle seguenti proprietà.
Siano $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ tre vettori quasiasi e α un numero reale; si ha che

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (**proprietà commutativa**)
2. $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ (**proprietà distributiva**)
3. $(\alpha \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\alpha \vec{b}) = \alpha(\vec{a} \cdot \vec{b})$

La proprietà commutativa discende immediatamente dalla definizione. Dimostriamo la proprietà distributiva lasciando la dimostrazione della terza proprietà come esercizio per il lettore.

Indichiamo con a_c, b_c, $(a+b)_c$, rispettivamente, le componenti dei vettori $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a} + \vec{b}$, rispetto al vettore $\vec{c}$. Si deduce allora, esaminando la figura 19, che è

$$(a+b)_c = a_c + b_c \tag{2}$$

Ricordando che il prodotto scalare tra due vettori è il prodotto del modulo di uno dei due vettori per la componente dell'altro vettore rispetto al primo, si ha

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = c \cdot (a+b)_c = (a+b)_c \cdot c$$

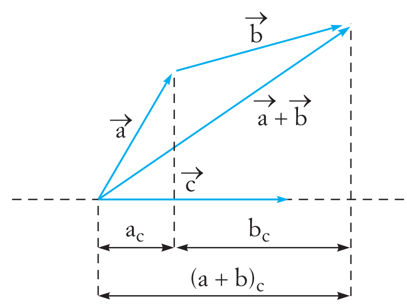


Figura 19

da cui, per la (2), è

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = (a_c + b_c)c = a_c c + b_c c = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$$

e quindi

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} \qquad \text{c.v.d.}$$

Osserviamo che, per la proprietà commutativa, la proprietà distributiva si può riformulare così

$$\vec{c} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{c} \cdot \vec{a} + \vec{c} \cdot \vec{b}$$

Infine, la terza proprietà si può generalizzare così

$$(\alpha \vec{a}) \cdot (\beta \vec{b}) = \alpha[\vec{a} \cdot (\beta \vec{b})] = \alpha\beta(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

Si noti che le proprietà 2 e 3 consentono di ridurre il prodotto scalare tra due espressioni vettoriali a una somma di prodotti scalari. Per esempio

$$(\alpha \vec{a} + \beta \vec{b}) \cdot (\gamma \vec{c} + \delta \vec{d}) = \alpha \vec{a} \cdot (\gamma \vec{c} + \delta \vec{d}) + \beta \vec{b}(\gamma \vec{c} + \delta \vec{d}) =$$
$$= \alpha\gamma(\vec{a} \cdot \vec{c}) + \alpha\delta(\vec{a} \cdot \vec{d}) + \beta\gamma(\vec{b} \cdot \vec{c}) + \beta\delta(\vec{b} \cdot \vec{d})$$

Espressione cartesiana del prodotto scalare

22 Siano $\vec{a}$ e $\vec{b}$ due vettori dello spazio che, per quanto detto nel paragrafo 19, possiamo esprimere come combinazione lineare dei versori fondamentali $\vec{\mathbf{x}}$, $\vec{\mathbf{y}}$, $\vec{\mathbf{z}}$

$$\vec{a} = a_x \vec{\mathbf{x}} + a_y \vec{\mathbf{y}} + a_z \vec{\mathbf{z}}; \qquad \vec{b} = b_x \vec{\mathbf{x}} + b_y \vec{\mathbf{y}} + b_z \vec{\mathbf{z}}$$

ALGEBRA LINEARE

TEORIA

Eseguiamo il prodotto scalare dei due vettori; ricordando le proprietà del prodotto scalare, avremo

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b} &= (a_x\vec{\mathbf{x}}+a_y\vec{\mathbf{y}}+a_z\vec{\mathbf{z}})\cdot(b_x\vec{\mathbf{x}}+b_y\vec{\mathbf{y}}+b_z\vec{\mathbf{z}}) = \\ &= a_xb_x\vec{\mathbf{x}}\cdot\vec{\mathbf{x}}+a_xb_y\vec{\mathbf{x}}\cdot\vec{\mathbf{y}}+a_xb_z\vec{\mathbf{x}}\cdot\vec{\mathbf{z}}+a_yb_x\vec{\mathbf{y}}\cdot\vec{\mathbf{x}}+ \\ &+a_yb_y\vec{\mathbf{y}}\cdot\vec{\mathbf{y}}+a_yb_z\vec{\mathbf{y}}\cdot\vec{\mathbf{z}}+a_zb_x\vec{\mathbf{z}}\cdot\vec{\mathbf{x}}+a_zb_y\vec{\mathbf{z}}\cdot\vec{\mathbf{y}}+a_zb_z\vec{\mathbf{z}}\cdot\vec{\mathbf{z}}\end{aligned} \tag{3}$$

Ma si ha

$\vec{\mathbf{x}}\cdot\vec{\mathbf{y}}=\vec{\mathbf{y}}\cdot\vec{\mathbf{z}}=\vec{\mathbf{z}}\cdot\vec{\mathbf{x}}=0$ (perché vettori perpendicolari $\longrightarrow$ $cos\ \varphi=0$)

$\vec{\mathbf{x}}\cdot\vec{\mathbf{x}}=\vec{\mathbf{y}}\cdot\vec{\mathbf{y}}=\vec{\mathbf{z}}\cdot\vec{\mathbf{z}}=1$ (perché vettori paralleli ed equiversi di modulo 1 $\longrightarrow$ $\cos\varphi=1$)

Quindi la (3) diventa

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z} \tag{4}$$

La (4) ci permette di concludere che il *prodotto scalare tra due vettori è la somma dei prodotti delle loro componenti cartesiane corrispondenti.*

Naturalmente, se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ sono vettori di un piano prefissato, cioè $a_z=0$ e $b_z=0$, essendo

$$\vec{a}=a_x\vec{\mathbf{x}}+a_y\vec{\mathbf{y}}; \qquad \vec{b}=b_x\vec{\mathbf{x}}+b_y\vec{\mathbf{y}}$$

la (4) si riduce a

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y} \tag{5}$$

1 Verificare che sono perpendicolari i vettori

$$\vec{v}=2\vec{\mathbf{x}}+2\vec{\mathbf{y}}-\vec{\mathbf{z}} \quad \text{e} \quad \vec{w}=3\vec{\mathbf{x}}-2\vec{\mathbf{y}}+2\vec{\mathbf{z}}$$

Ricordando che, per quanto detto nel paragrafo 20, due vettori sono perpendicolari se e solo se il loro prodotto scalare è nullo, si deve calcolare $\vec{v}\cdot\vec{w}$.
Si ha che è $\vec{v}\cdot\vec{w}=2\cdot3+2\cdot(-2)+(-1)\cdot2=0$.
Si deduce che $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sono perpendicolari.

2 Calcolare la componente del vettore $\vec{a}=-9\vec{\mathbf{x}}+3\sqrt{3}\vec{\mathbf{y}}$ rispetto al vettore

$$\vec{b}=(\sqrt{6}+\sqrt{2})\vec{\mathbf{x}}+(\sqrt{6}-\sqrt{2})\vec{\mathbf{y}}$$

Detto φ l'angolo convesso formato dai due vettori e detta a_b la componente di $\vec{a}$ rispetto al vettore $\vec{b}$, si ha

$$a_b=a\ cos\ \varphi \tag{6}$$

Poiché $cos\ \varphi=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{ab}$, si ha dunque, sostituendo nella (6), $a_b=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{b}$

Essendo

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=-9(\sqrt{6}+\sqrt{2})+3\sqrt{3}(\sqrt{6}-\sqrt{2})=-12\sqrt{6} \quad \text{e} \quad b=\sqrt{(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2+(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}=4,$$

si ha quindi

$$a_b=\frac{-12\sqrt{6}}{4}=-3\sqrt{6}$$

Vettori

TEORIA

Prodotto vettoriale tra due vettori

Definizione di prodotto vettoriale

23 **D** Siano $\vec{a}$ e $\vec{b}$ due vettori, nel piano o nello spazio che formano un angolo φ. Si dice **prodotto vettoriale** tra i due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$, e si indica con

$$\vec{a} \times \vec{b}$$

(tale scrittura si legge "*a* vettore *b*"), il vettore $\vec{c}$ così definito:

1) $\vec{c}$ ha modulo $c = ab\ sen\ \varphi$;
2) la direzione di $\vec{c}$ è perpendicolare sia al vettore $\vec{a}$ sia al vettore $\vec{b}$;
3) il verso di $\vec{c}$ è definito nel modo seguente (**regola della vite**). Si immagini una vite destrorsa che si avviti ruotando nello stesso senso della rotazione che il vettore $\vec{a}$ deve compiere per assumere la stessa direzione di $\vec{b}$, descrivendo l'angolo convesso φ. Il verso di $\vec{c}$ è quello secondo cui tale vite avanza.

Occorre tenere presente che su alcuni testi il prodotto vettoriale tra $\vec{a}$ e $\vec{b}$ può essere indicato con $\vec{a} \wedge \vec{b}$.

Per comprendere meglio questa definizione, rappresentiamo i due vettori mediante due segmenti orientati $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ e $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, aventi il primo estremo in comune.
Se tali segmenti si trovano su una stessa retta, avendosi $\varphi = 0°$ oppure $\varphi = 180°$ e quindi $sen\ \varphi = 0$, il vettore $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ avrà modulo $c = 0$. In questo caso, dunque, $\vec{a} \times \vec{b}$ è il vettore nullo (paragrafo 5), di cui non ha senso definire direzione e verso.

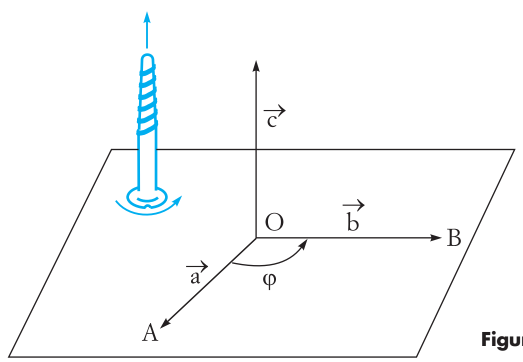


Figura 20

Se invece OA e OB non si trovano sulla stessa retta, i punti O, A e B non sono allineati, perciò per essi passa uno e un solo piano. La direzione di $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ è quella perpendicolare a tale piano (fig. 20).
Per individuare il verso di $\vec{c}$ si può anche ricorrere alla *regola della mano destra*: il verso di $\vec{c}$ è quello indicato dal medio di tale mano quando il pollice indica il vettore $\vec{a}$ e l'indice il vettore $\vec{b}$ e il medio è disposto perpendicolarmente al piano della mano stessa.

Osservazione. Il prodotto vettoriale ha delle notevoli applicazioni in fisica.
Accenniamone due tra le più importanti.
Se O e A sono due punti e $\vec{F}$ è una forza applicata nel punto A, il *momento* di tale forza rispetto a O è dato dal prodotto vettoriale $\overrightarrow{OA} \times \vec{F}$ (fig. 21).
Se una particella dotata di carica elettrica q si muove con velocità $\vec{v}$ in un campo magnetico $\vec{B}$, su di essa agisce una forza $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ (fig. 22).

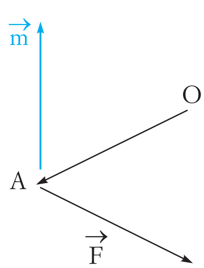


Figura 21

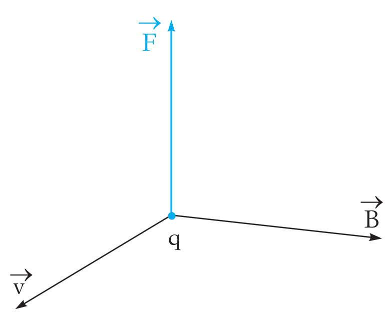


Figura 22

Proprietà del prodotto vettoriale

24 Il prodotto vettoriale gode delle seguenti proprietà. Se $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ sono tre vettori qualsiasi e α è uno scalare, si ha che

1. $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$ **(proprietà anticommutativa)**
2. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ **(proprietà distributiva)**
3. $(\alpha \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\alpha \vec{b}) = \alpha(\vec{a} \times \vec{b})$

Il prodotto vettoriale non gode della proprietà associativa, cioè, in generale

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$$

Osservazioni sul prodotto vettoriale

25 1. Se i vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ sono paralleli è *sen* $\varphi = 0$, come si è già detto nel paragrafo 23, e quindi si ha $\vec{a} \times \vec{b} = 0$. In particolare, il prodotto vettoriale di un vettore per se stesso è sempre il vettore nullo

$$\vec{a} \times \vec{a} = \mathbf{0}$$

2. Il modulo del prodotto vettoriale $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ di due vettori non può superare il prodotto dei moduli dei due vettori.
   Infatti, essendo, per $0 \leq \varphi \leq 180°$, $0 \leq sen\ \varphi \leq 1$, si ha $ab\ sen\ \varphi \leq ab$ e quindi

$$c \leq ab$$

   Il segno di uguaglianza in tale relazione vale se e solo se $sen\ \varphi = 1 \longrightarrow \varphi = 90°$.
   Il modulo del prodotto vettoriale di due vettori è uguale al prodotto dei loro moduli se e solo se i due vettori sono ortogonali.
   Il prodotto vettoriale di due versori tra loro perpendicolari è un terzo versore, perpendicolare a entrambi.

3. Per definizione, il prodotto vettoriale tra due vettori è, esso stesso, un vettore. Contrariamente al prodotto scalare, il prodotto vettoriale è dunque un'*operazione interna* nell'insieme dei vettori dello spazio. Se invece ci limitiamo a considerare l'insieme dei vettori di un prefissato piano xOy, il prodotto vettoriale è sempre definito, ma non è un vettore di tale piano; dunque, nell'insieme dei vettori di un piano, l'operazione di prodotto vettoriale non è un'operazione interna.

Espressione cartesiana del prodotto vettoriale

26 Se $\vec{\mathbf{x}}$, $\vec{\mathbf{y}}$, $\vec{\mathbf{z}}$ sono i versori fondamentali nello spazio, in base alla definizione di prodotto vettoriale e all'osservazione n. 3 del paragrafo precedente, si ha

$$\vec{\mathbf{x}} \times \vec{\mathbf{y}} = \vec{\mathbf{z}}; \qquad \vec{\mathbf{y}} \times \vec{\mathbf{z}} = \vec{\mathbf{x}}; \qquad \vec{\mathbf{z}} \times \vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{y}} \qquad (1)$$

$$\vec{\mathbf{y}} \times \vec{\mathbf{x}} = -\vec{\mathbf{z}}; \qquad \vec{\mathbf{z}} \times \vec{\mathbf{y}} = -\vec{\mathbf{x}}; \qquad \vec{\mathbf{x}} \times \vec{\mathbf{z}} = -\vec{\mathbf{y}} \qquad (2)$$

$$\vec{\mathbf{x}} \times \vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{y}} \times \vec{\mathbf{y}} = \vec{\mathbf{z}} \times \vec{\mathbf{z}} = \mathbf{0} \qquad (3)$$

Notiamo che, in ciascuna delle uguaglianze (1), i tre versori fondamentali sono disposti in ordine alfabetico (xyz) o in permutazioni cicliche di tale ordine (yzx o zxy). Questa osservazione è utile per ricordare le (1) e, di conseguenza, le (2), che da quelle discendono per la proprietà anticommutativa.
Siano ora

$$\vec{a} = a_x \vec{\mathbf{x}} + a_y \vec{\mathbf{y}} + a_z \vec{\mathbf{z}}\ ; \qquad \vec{b} = b_x \vec{\mathbf{x}} + b_y \vec{\mathbf{y}} + b_z \vec{\mathbf{z}}$$

due vettori qualsiasi.

Vettori

TEORIA

Tenendo presenti le (1), le (2), le (3) e la proprietà 2 del paragrafo 24, l'espressione cartesiana del prodotto vettoriale è

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_x \vec{\mathbf{x}} + a_y \vec{\mathbf{y}} + a_z \vec{\mathbf{z}}) \times (b_x \vec{\mathbf{x}} + b_y \vec{\mathbf{y}} + b_z \vec{\mathbf{z}}) =$$
$$= (a_y b_z - a_z b_y)\vec{\mathbf{x}} + (a_z b_x - a_x b_z)\vec{\mathbf{y}} + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{\mathbf{z}}. \qquad (4)$$

Tale formula ci permette di determinare le componenti cartesiane del prodotto vettoriale di due vettori di cui sono note le componenti cartesiane.
Si noti che se i due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ sono paralleli al piano xy, si avrà $a_z = b_z = 0$ e quindi la (4) assumerà la forma

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_x b_y - a_y b_x)\vec{\mathbf{z}}$$

che rappresenta un vettore parallelo all'asse z.

1 Siano $\vec{a} = 2\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{y}} + 3\vec{\mathbf{z}}$, $\vec{b} = -3\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{y}} + 2\vec{\mathbf{z}}$.

Dopo aver calcolato il prodotto vettoriale $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, verificare che

a) il vettore $\vec{c}$ è perpendicolare ad $\vec{a}$ e a $\vec{b}$;

b) il modulo di $\vec{c}$ è *ab sen* φ, essendo φ l'angolo, da determinarsi, formato dai due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

Applicando la (4), si ha subito

$$\vec{c} = \vec{\mathbf{x}} - 13\vec{\mathbf{y}} - 5\vec{\mathbf{z}} \qquad (5)$$

a) Calcoliamo i due seguenti prodotti scalari:

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = 2 \cdot 1 + (-1) \cdot (-13) + 3 \cdot (-5) = 0$$
$$\vec{b} \cdot \vec{c} = (-3) \cdot 1 + (-1)(-13) + 2 \cdot (-5) = 0$$

Dunque, ricordando che due vettori non nulli sono perpendicolari se e solo se il loro prodotto scalare è zero, $\vec{c}$ risulta perpendicolare sia ad $\vec{a}$ sia a $\vec{b}$.

b) Determiniamo l'angolo φ formato dai due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$. È $\cos\varphi = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ab}$.

Essendo $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$, $a = \sqrt{14}$, $b = \sqrt{14}$, si ha

$$\cos\varphi = \frac{1}{14} \longrightarrow \varphi = \arccos\frac{1}{14}$$

Osserviamo che essendo $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 > 0$, φ è un angolo acuto e quindi risulta

$$\operatorname{sen}\varphi = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{14}\right)^2} = \frac{\sqrt{195}}{14}$$

Dalla (5) si ha $c = \sqrt{195}$ ed è

$$ab \operatorname{sen}\varphi = \sqrt{14} \cdot \sqrt{14} \cdot \frac{\sqrt{195}}{14} = \sqrt{195}$$

L'uguaglianza $c = ab \operatorname{sen}\varphi$ è perciò verificata.

ALGEBRA LINEARE

TEORIA

2 Dati i vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$, verificare che $\vec{a} \times \vec{b}$ risulta sempre perpendicolare ad $\vec{a}$.

È sufficiente mostrare che il prodotto scalare tra $\vec{a} \times \vec{b}$ e $\vec{a}$ è nullo.

Utilizziamo la (4) per calcolare $\vec{a} \times \vec{b}$, che poi moltiplicheremo scalarmente per $\vec{a}$, ottenendo

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = (a_y b_z - a_z b_y)a_x + (a_z b_x - a_x b_z)a_y + (a_x b_y - a_y b_x)a_z =$$
$$= \cancel{a_x a_y b_z} - \cancel{a_x b_y a_z} + \cancel{b_x a_y a_z} - \cancel{a_x a_y b_z} + \cancel{a_x b_y a_z} - \cancel{b_x a_y a_z} = 0$$

Il lettore può verificare, per esercizio, che è anche $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{b} = 0$ e concludere così che $\vec{a} \times \vec{b}$ è perpendicolare anche a $\vec{b}$.

Espressione matriciale del prodotto vettoriale

27 Utilizzando il linguaggio matriciale, l'espressione cartesiana del prodotto vettoriale può essere posta in forma di determinante:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{x}} & a_x & b_x \\ \vec{\mathbf{y}} & a_y & b_y \\ \vec{\mathbf{z}} & a_z & b_z \end{vmatrix} \tag{6}$$

Infatti, sviluppando formalmente tale determinante, ad esempio con la regola di Sarrus illustrata nel paragrafo 14 del capitolo sulle matrici, otteniamo

$$\begin{vmatrix} \vec{\mathbf{x}} & a_x & b_x \\ \vec{\mathbf{y}} & a_y & b_y \\ \vec{\mathbf{z}} & a_z & b_z \end{vmatrix} = a_y b_z \vec{\mathbf{x}} + a_x b_y \vec{\mathbf{z}} + a_z b_x \vec{\mathbf{y}} - a_y b_x \vec{\mathbf{z}} - a_x b_z \vec{\mathbf{y}} - a_z b_y \vec{\mathbf{x}} =$$
$$= (a_y b_z - a_z b_y)\vec{\mathbf{x}} + (a_z b_x - a_x b_z)\vec{\mathbf{y}} + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{\mathbf{z}}$$

Osserviamo che quello che figura nell'espressione precedente è un determinante solo in senso formale: infatti gli elementi della prima colonna sono vettori, non numeri. Ciò non toglie che, se si sviluppa tale determinante seguendo le regole note, si ottiene un'espressione che rappresenta un vettore e tale vettore coincide con il prodotto vettoriale dei due vettori dati; possiamo quindi affermare che vale la (6).

Calcoliamo il prodotto vettoriale dei seguenti vettori:

$$\vec{\mathbf{x}} - 2\vec{\mathbf{y}} + 3\vec{\mathbf{z}}; \qquad -\vec{\mathbf{x}} + 3\vec{\mathbf{y}} - 4\vec{\mathbf{z}}$$

Detti $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ rispettivamente il primo e il secondo vettore, utilizzando la notazione matriciale possiamo scrivere

$$\vec{v}_1 x \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{x}} & 1 & -1 \\ \vec{\mathbf{y}} & -2 & 3 \\ \vec{\mathbf{z}} & 3 & -4 \end{vmatrix} = 8\vec{\mathbf{x}} + 3\vec{\mathbf{z}} + 3\vec{\mathbf{y}} - 2\vec{\mathbf{z}} - 9\vec{\mathbf{x}} + 4\vec{\mathbf{y}} = -\vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{y}} + \vec{\mathbf{z}}$$

Vettori

TEORIA