Numeri di Bernoulli

Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

In matematica, i **numeri di Bernoulli** B_n costituiscono una successione di numeri razionali che gioca un ruolo importante in vari problemi. Accanto ad essi conviene prendere in considerazione i polinomi di Bernoulli che si possono considerare una loro generalizzazione.

> *Attenzione: la notazione B_n viene utilizzata anche per denotare i numeri di Bell; per distinguerli da questi ultimi talora per i numeri di Bernoulli si usano le notazioni b_n .*

Un segnale della versatilità dei numeri di Bernoulli proviene dal fatto che possono essere definiti in molti modi diversi. Essi furono inizialmente individuati e studiati nel 1731 da Jakob Bernoulli il quale li tratta nella sua opera *Ars Conjectandi* in relazione con le forme chiuse per le somme di potenze di interi successivi

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^m = 0^m + 1^m + 2^m + \cdots + (n-1)^m$$

per valori interi positivi fissati di *m*.

Queste forme chiuse erano state individuate già nel 1631 da Johann Faulhaber cui Bernoulli fa riferimento. Dopo la sua morte nel 1721 Abraham de Moivre diede ai numeri B_n il nome con il quale sono tuttora conosciuti.

Le precedenti somme sono esprimibili per ogni *n* come polinomi in *m* di grado *n*+1. Lo schieramento bidimensionale dei coefficienti di tali polinomi è esprimibile mediante lo schieramento monodimensionale dei numeri di Bernoulli come segue:

$$\sum_{k=0}^{m-1} k^n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} B_k m^{n+1-k} \ .$$

Per esempio consideriamo *n* = 1: abbiamo

$$0 + 1 + 2 + ... + (m-1) \ = \ 1/2(B_0 m^2 + 2B_1 m^1) \ = \ 1/2(m^2 - m) \ .$$

I numeri di Bernoulli possono essere calcolati usando la seguente formula di ricorrenza:

$$\sum_{j=0}^{m} \binom{m+1}{j} B_j = 0 \quad \text{con la condizione iniziale} \ \ B_0 = 1 \ .$$

I numeri di Bernoulli possono anche essere definiti usando una funzione generatrice esponenziale con la formula

$$\frac{x}{e^x - 1} =: \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!}$$

Questa può considerarsi una uguaglianza fra serie formali di potenze o fra funzioni analitiche; in questo caso per la convergenza della serie si chiede che x abbia valore assoluto minore di 2π (il raggio di convergenza della serie stessa).

Si può dimostrare che $B_n = 0$ per tutti gli n dispari maggiori di 1.

I numeratori e i denominatori dei numeri di Bernoulli costituiscono le sequenze A027641 (http://www.research.att.com/cgi-bin/access.cgi/as/njas/sequences/eisA.cgi?Anum=A027641/) e A027642 (http://www.research.att.com/cgi-bin/access.cgi/as/njas/sequences/eisA.cgi?Anum=A027642/) dell'archivio OEIS di Neil Sloane.

I primi numeri sono i seguenti.

n	B_n
0	1
1	−1/2
2	1/6
3	0
4	−1/30
5	0
6	1/42
7	0
8	−1/30
9	0
10	5/66
11	0
12	−691/2730
13	0
14	7/6

La differenza tra il valore particolare $B_{12} = -691/2730$ e le altre semplici frazioni che danno i numeri vicini inducono ad escludere la possibilità di una semplice forma chiusa per i numeri di Bernoulli.

I numeri di Bernoulli compaiono anche negli sviluppi in serie di Taylor della tangente e della tangente iperbolica, nella formula di Euler-Maclaurin e nelle espressioni di certi valori della funzione zeta di Riemann.

Nella nota G delle Note di Ada Byron sull'analytical engine del 1842 è stato descritto per la prima volta un algoritmo per la costruzione dei numeri di Bernoulli con una macchina in grado di eseguire calcoli automatici.

Voci correlate

- Numeri di Bernoulli di secondo genere
- Polinomi di Bernoulli di secondo genere
- Algoritmo di Ada Lovelace per i numeri di Bernoulli

Collegamenti esterni

- Bernoulli Number (http://mathworld.wolfram.com/BernoulliNumber.html) in MathWorld

- The Bernoulli Number Page (http://www.bernoulli.org/)
- The first 498 Bernoulli numbers (http://www.gutenberg.net/etext/2586) nel Project Gutenberg

Categorie: Combinatoria | Funzioni speciali

- Ultima modifica per la pagina: 11:06, 4 dic 2008.