

# Indice

<b>1</b>	<b>Grandezze fisiche e misure</b>	<b>5</b>
1.1	Concetti generali . . . . .	5
1.2	Analisi degli errori . . . . .	13
<b>2</b>	<b>Statica</b>	<b>19</b>
2.1	La forza . . . . .	19
2.2	Classificazione delle forze . . . . .	20
2.3	L'equilibrio del punto materiale . . . . .	25
2.4	Il momento di una forza . . . . .	31
2.5	Sistemi di forze . . . . .	35
2.6	L'equilibrio del corpo rigido . . . . .	40
2.7	L'equilibrio dei fluidi . . . . .	48
<b>3</b>	<b>Cinematica</b>	<b>57</b>
3.1	Il moto in una dimensione . . . . .	57
3.2	Il moto uniforme (1D) . . . . .	64
3.3	Il moto uniformemente accelerato (1D) . . . . .	69
3.4	Il moto nel piano cartesiano . . . . .	76
3.5	Il moto di un proiettile . . . . .	80
3.6	Il moto circolare . . . . .	86
3.7	Il moto armonico . . . . .	92
3.8	Moti relativi di sistemi di riferimento . . . . .	100
<b>4</b>	<b>Dinamica</b>	<b>109</b>
4.1	I princìpi della dinamica . . . . .	109
4.2	Dinamica del punto materiale . . . . .	110
4.2.1	Problemi su fili tesi o piani inclinati . . . . .	110
4.2.2	Problemi sulla forza di attrito radente . . . . .	116
4.2.3	Problemi sul moto circolare . . . . .	124
4.2.4	Problemi sul moto di gravi con attrito viscoso . . . . .	127
4.2.5	Problemi sulla forza elastica . . . . .	136
4.2.6	Problemi vari sulla dinamica del punto materiale . . . . .	146
4.2.7	Il lavoro e la potenza . . . . .	147

4.2.8	L'energia cinetica . . . . .	151
4.2.9	L'energia potenziale . . . . .	152
4.2.10	L'energia meccanica e la sua conservazione . . . . .	156
4.2.11	La quantità di moto e l'impulso . . . . .	161
4.2.12	Il momento angolare e l'impulso angolare . . . . .	164
4.3	Sistemi non inerziali e forze apparenti . . . . .	169
4.4	Dinamica dei sistemi di punti materiali . . . . .	171
4.4.1	Sistema "laboratorio" e sistema "centro di massa" . . . . .	179
4.4.2	Conservazione dell'energia . . . . .	180
4.4.3	Conservazione della quantità di moto . . . . .	181
4.4.4	Conservazione del momento angolare . . . . .	181
4.4.5	Sistemi di due particelle e urti . . . . .	181
4.5	Dinamica del corpo rigido . . . . .	200
4.6	Gravitazione . . . . .	220
4.7	Dinamica dei fluidi . . . . .	230
<b>5</b>	<b>Strumenti matematici</b>	<b>241</b>
5.1	Algebra . . . . .	241
5.2	Geometria euclidea nel piano . . . . .	246
5.3	Geometria analitica nel piano . . . . .	247
5.4	Coniche . . . . .	252
5.5	Funzioni esponenziali e logaritmiche . . . . .	261
5.6	Funzioni goniometriche . . . . .	262
5.7	Trigonometria . . . . .	268
5.8	Vettori . . . . .	270
5.8.1	Rappresentazione cartesiana dei vettori . . . . .	272
5.9	Disequazioni e studio del segno . . . . .	277
5.10	Analisi matematica . . . . .	283
5.10.1	Limiti . . . . .	284
5.10.2	Derivate . . . . .	292
5.10.3	Integrali . . . . .	295
5.10.4	Equazioni differenziali ordinarie . . . . .	304
5.10.5	Serie di Taylor . . . . .	307
<b>6</b>	<b>Strumenti informatici</b>	<b>309</b>
6.1	Gnuplot . . . . .	309
6.1.1	Grafici di funzioni definite a tratti . . . . .	311
6.1.2	Grafici di più funzioni nello stesso piano . . . . .	311
6.1.3	Superfici nello spazio . . . . .	312
6.1.4	Grafici di dati da file . . . . .	313
6.1.5	Animazioni . . . . .	315
6.2	Tracker . . . . .	316
6.2.1	Utilizzo di base . . . . .	316

<b>7</b>	<b>Approfondimenti</b>	<b>323</b>
7.1	Esempi di sistemi di forze equivalenti . . . . .	323
7.2	Gruppi, Campi e Spazi Vettoriali . . . . .	326
7.3	Funzioni in più variabili . . . . .	328
7.4	Angolo solido, flusso e teorema di Gauss . . . . .	331
<b>8</b>	<b>Formulari e dati notevoli</b>	<b>335</b>
8.1	Formule di geometria piana . . . . .	335
8.2	Formule di algebra . . . . .	336
8.3	Definizioni e dati di interesse scientifico . . . . .	336

## Argomenti di livello avanzato

1	Equazioni della statica dei fluidi (derivate parziali) . . . . .	50
2	Moti relativi (derivate) . . . . .	101
3	Moto con attrito viscoso (1) (equaz. diff. e serie di Taylor) . . . . .	127
4	Moto con attrito viscoso (2) (equaz. diff. e serie di Taylor) . . . . .	129
5	Risonanza meccanica (integrali ed equazioni differenziali) . . . . .	140
6	Campo di forza proporzionale a $1/r^2$ (calcolo integrale) . . . . .	155
7	Dall'energia potenziale alla forza (derivate parziali) . . . . .	156
8	Lavoro della forza d'attrito (calcolo integrale) . . . . .	158
9	Centro di massa (calcolo integrale) . . . . .	176
10	Potenziale da campo di forza (calcolo integrale) . . . . .	237
11	Equazioni differenziali ordinarie . . . . .	304
12	Serie di Taylor . . . . .	307
13	Gruppi, Campi e Spazi Vettoriali . . . . .	326
14	Funzioni in più variabili . . . . .	328
15	Angolo solido, flusso e teorema di Gauss . . . . .	331

## Attività di laboratorio

1	Python/Gnuplot. Simulazione di un moto armonico . . . . .	96
2	Gnuplot. Grafici orari del moto con attrito viscoso . . . . .	129
3	Gnuplot. Moto balistico con attrito viscoso . . . . .	134
4	Tracker: Risonanza meccanica . . . . .	140
5	Gnuplot. Urto elastico in 2D di due sfere: una inizialmente ferma	196
6	Gnuplot. Urto elastico in 2D di due sfere . . . . .	198

# Introduzione

I concetti basilari espressi in questo libro sono sistematicamente presentati come enunciati (espressioni formali valutabili come vere o false), classificati nelle seguenti categorie:

<b>Proprietà</b>	enunciati verificabili tramite una dimostrazione formale.
<b>Teoremi</b>	proprietà di particolare rilevanza o generalità.
<b>Principi</b>	enunciati la cui verità è in qualche modo evidente; pertanto non richiedono dimostrazioni.
<b>Leggi fisiche</b>	enunciati verificati da una dimostrazione sperimentale (vedi “metodo scientifico”).
<b>Definizioni</b>	accordi formali specifici e non ambigui; generalmente non richiedono alcuna dimostrazione.
<b>Regole</b>	enunciati costituiti da sequenze finite di istruzioni, programmate per il raggiungimento di un determinato risultato; possono richiedere dimostrazioni che giustificano determinate sequenze.

Molte proprietà sono dimostrate in dettaglio. Alcuni risultati (pochi in realtà) sono forniti senza dimostrazione, o perché si dimostrano facilmente oppure perché richiedono conoscenze che vanno oltre i contenuti previsti.

Nel primo capitolo sono introdotti i concetti generali della fisica e sviluppate le nozioni basilari sull’analisi degli errori nelle misure sperimentali.

Nei capitoli dal secondo al quarto vengono trattate le principali branche della Meccanica, nell’ordine: Statica, Cinematica e Dinamica.

Il quinto ed il sesto capitolo contengono rispettivamente gli “strumenti matematici e informatici”, spesso richiamati nelle pagine precedenti, presentati come necessario supporto formale alla fisica.

Il settimo capitolo contiene approfondimenti su argomenti che, a livello di scuola secondaria, potrebbero interessare alunni particolarmente curiosi o docenti intenzionati a proporre attività di potenziamento.

L'ottavo, breve, capitolo conclude il testo con una raccolta di formulari e risultati di notevole interesse scientifico.

Al termine di molte sezioni sono proposti dei problemi o delle schede di laboratorio, quasi sempre con dati da scegliere a piacere, seguiti da soluzioni esplicative. Sia i problemi che le schede sono impostati in modo da risultare significativi per il tema trattato.

Nella risoluzione dei problemi è stato utilizzato il seguente schema concettuale.

- (1) Schema grafico del sistema fisico.
- (2) Dati e incognite.
- (3) Impostazione delle equazioni.
- (4) Risoluzione delle equazioni.

I dettagli sono riportati nella seguente tabella.

(1) Rappresentare con uno schema grafico, semplice ma esauriente, il sistema fisico descritto dal problema.	Nello schema grafico riportare <b>le lettere</b> scelte per tutte le grandezze coinvolte nel problema, <b>non i valori numerici</b> .
(2) Riportare in una tabella le grandezze coinvolte nel problema, <b>le stesse riportate nello schema del punto (1)</b> , più eventualmente altre.	Utilizzare le stesse lettere riportate nello schema, specificando i valori numerici noti (possibilmente nel SI) ed indicando con ? quelli incogniti.
(3) Iniziare lo svolgimento scrivendo le appropriate leggi fisiche (o proprietà o definizioni) che contengano le grandezze scelte (note e incognite), <b>le stesse riportate nella tabella del punto (2)</b> , più eventualmente altre.	Le relazioni scritte diventeranno equazioni da risolvere; il problema fisico deve essere tradotto in un problema matematico.
(4) Risolvere le equazioni e riportare le soluzioni alla fine con le corrette unità di misura (queste si possono omettere nei passaggi intermedi).	Le equazioni vanno risolte possibilmente <b>in forma letterale</b> con le sostituzioni numeriche eseguite il meno possibile, idealmente solo alla fine.

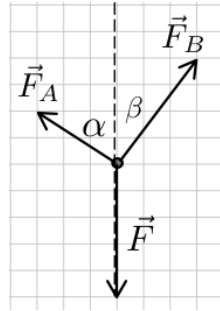
La procedura descritta è ovviamente flessibile, ad esempio durante l'esecuzione dei punti (3) e (4) può essere utile ritornare ai punti (1) o (2) per aggiungere/cancellare/modificare dati o rappresentazioni grafiche.



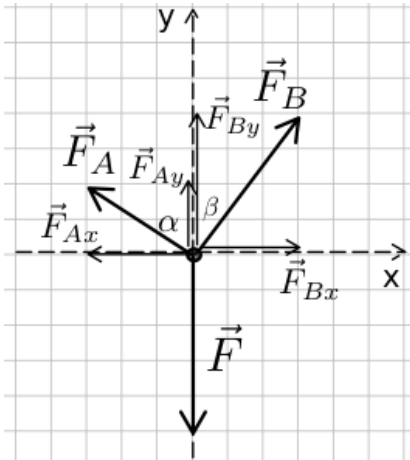
## PROBLEMI

## 2.3.1

Ad un punto materiale in equilibrio sono applicate le forze  $\vec{F}$ ,  $\vec{F}_A$  ed  $\vec{F}_B$ . Scegliere a piacere i moduli delle forze e calcolare gli angoli  $\alpha$  e  $\beta$  che formano rispettivamente  $\vec{F}_A$  ed  $\vec{F}_B$  rispetto alla retta d'azione di  $\vec{F}$ .



## Soluzione



$$F = 6 \text{ N}$$

$$F_A = 4 \text{ N}$$

$$F_B = 5 \text{ N}$$

$$\alpha = ?$$

$$\beta = ?$$

Applichiamo la condizione di equilibrio del punto materiale

(Legge 2.10)

$$\vec{F} + \vec{F}_A + \vec{F}_B = 0$$

Si tratta di una equazione vettoriale che, utilizzando la rappresentazione cartesiana dei vettori nel riferimento rappresentato in figura, si traduce in due equazioni scalari corrispondenti alle due componenti cartesiane  $x$  e  $y$  dei vettori.

$$\text{componenti } x : F_x + F_{Ax} + F_{Bx} = 0$$

$$\text{componenti } y : F_y + F_{Ay} + F_{By} = 0$$

ovvero

$$\text{comp. } x : 0 - F_A \sin \alpha + F_B \sin \beta = 0$$

$$\text{comp. } y : -F + F_A \cos \alpha + F_B \cos \beta = 0$$

Le ultime due equazioni costituiscono un sistema di due equazioni nelle due incognite  $\alpha$  e  $\beta$ , che può essere risolto con opportune sostituzioni. Iniziamo spostando a destra tutti i termini che non contengono l'incognita  $\beta$

$$F_B \sin \beta = F_A \sin \alpha \quad (*)$$

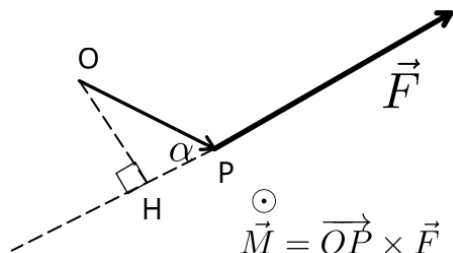
$$F_B \cos \beta = F - F_A \cos \alpha$$

Ora eleviamo al quadrato entrambi i membri nelle due equazioni.



## 2.4 Il momento di una forza

**Definizione 2.7 (momento di una forza)** Data una forza  $\vec{F}$  applicata nel punto  $P$  e dato un punto  $O$ , detto “polo”, di definisce “momento di  $\vec{F}$  rispetto ad  $O$ ” la grandezza fisica vettoriale  $\vec{M} = \vec{OP} \times \vec{F}$ .



Se  $\overline{OH}$  è la distanza di  $O$  dalla retta d'azione di  $\vec{F}$ , detta **braccio della forza**, allora il modulo del momento si può scrivere come:

$$M = \overline{OP} \cdot F \cdot \sin \alpha = \overline{OH} \cdot F$$

Se  $\vec{OP}$  ed  $\vec{F}$  sono nel piano del foglio allora il momento  $\vec{M}$  sarà perpendicolare al foglio, entrante od uscente a seconda dei casi; nell'esempio in figura  $\vec{M} = \vec{OP} \times \vec{F}$  risulta uscente (vedi la “regola della mano destra” nel prodotto vettoriale (Def. 5.26)).

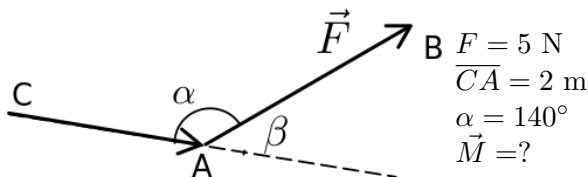
## PROBLEMI

### 2.4.1

Data una forza  $\vec{F} = \vec{AB}$ , considerare un punto  $C$  tale che il segmento  $CA$  formi un angolo  $\alpha$  con  $AB$ . Scegliere a piacere i valori di  $F$ ,  $\overline{CA}$  ed  $\alpha$ . Determinare il momento  $\vec{M}$  di  $\vec{F}$  rispetto a  $C$ .

#### Soluzione

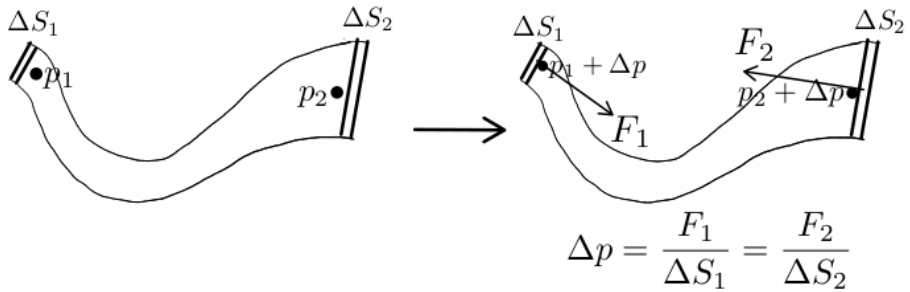
##### Versione 1



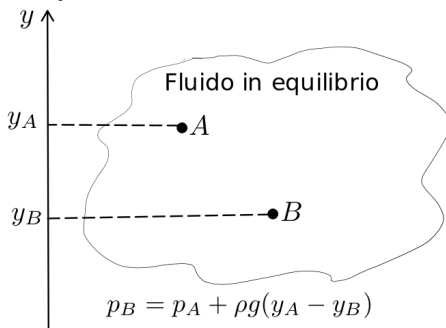
Per la regola della mano destra (Definizione 5.26) il momento  $\vec{M} = \vec{CA} \times \vec{F}$  è un vettore uscente  $\odot$ . Inoltre, poichè l'angolo compreso tra  $\vec{CA}$  ed  $\vec{F}$  è  $\beta = 180^\circ - \alpha = 40^\circ$ ,  $M = \overline{CA} F \sin \beta = 2 \cdot 5 \cdot \sin 40^\circ = 6.43$  N·m



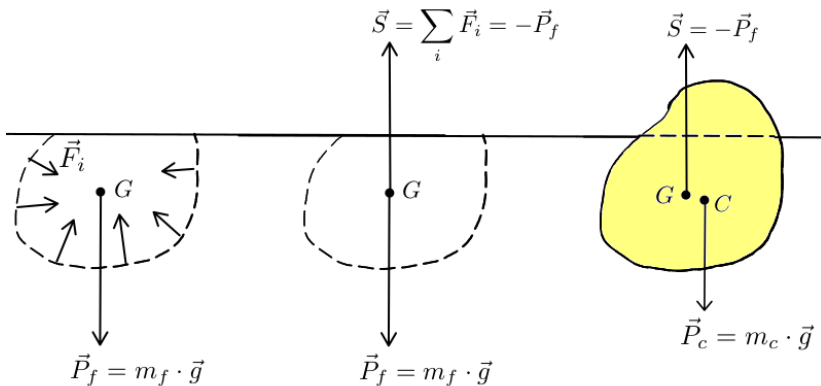
**Legge fisica 2.12 (legge di Pascal)** *La variazione di pressione prodotta in un punto all'interno di un fluido in equilibrio si trasmette inalterata in tutti gli altri punti del fluido.*



**Legge fisica 2.13 (legge di Stevino)** *Le pressioni in due punti A e B all'interno di un fluido in equilibrio, sottoposto all'azione della forza peso, sono tali che  $p_B = p_A + \rho g(y_A - y_B)$ , dove  $\rho$  è la densità del fluido,  $g$  è l'accelerazione di gravità e  $y_A, y_B$  sono le coordinate dei punti A e B in un riferimento verticale orientato verso l'alto.*

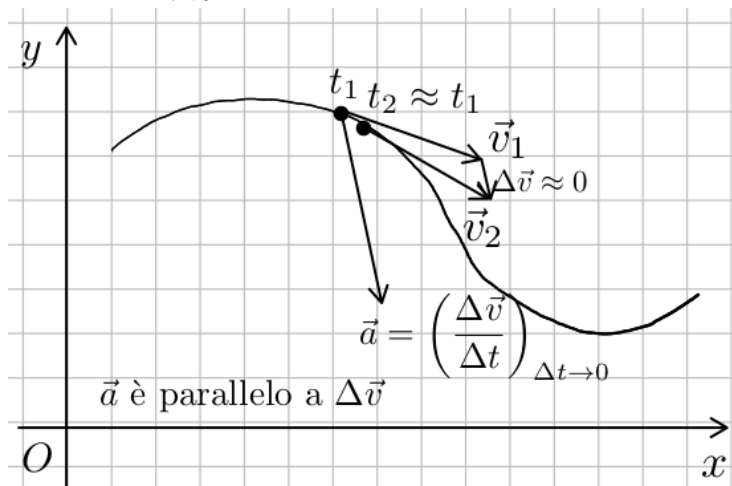


**Legge fisica 2.14 (legge di Archimede)** *Un corpo immerso in un fluido riceve una spinta dal basso verso l'alto di intensità uguale al peso del fluido spostato.*

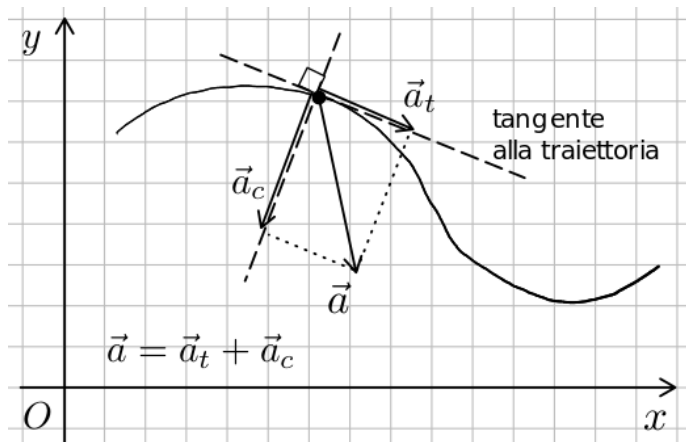




$$\vec{a} = \left( \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \right)_{\Delta t \rightarrow 0} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

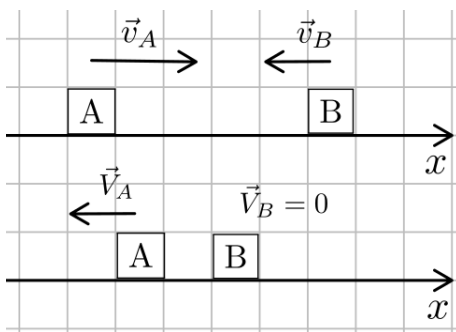


**Definizione 3.16 (componenti dell'accelerazione)** *L'accelerazione istantanea  $\vec{a}$  di un oggetto, in un piano cartesiano, si può scomporre in una componente  $\vec{a}_t$  tangente alla traiettoria, detta "componente tangenziale", ed in una componente normale alla tangente  $\vec{a}_c$ , detta "componente centripeta".*



**Proprietà 3.10 (circonferenza osculatrice)** *È possibile approssimare un piccolo tratto, intorno ad un punto  $P$ , di una traiettoria non rettilinea con un'unica circonferenza, detta "circonferenza osculatrice", avente il raggio per  $P$  perpendicolare alla tangente alla traiettoria per  $P$ ; in altri termini, la circonferenza osculatrice è la circonferenza passante per tre punti molto vicini a  $P$ .*





$$\begin{aligned}
 m_A &= 2 \text{ kg}, \\
 v_A &= 0.6 \text{ m/s (comp. } x) \\
 m_B &= 3 \text{ kg}, \quad V_B = 0 \text{ m/s} \\
 v_B &=? \text{ (comp. } x) \\
 V_A &=? \text{ (comp. } x)
 \end{aligned}$$

In riferimento allo schema riportato in figura, utilizziamo le relazioni note nel caso di urto elastico centrale normale.

$$V_A = \frac{(m_A - m_B)v_A + 2m_B v_B}{m_A + m_B}; \quad V_B = \frac{(m_B - m_A)v_B + 2m_A v_A}{m_A + m_B}$$

dove, ribadiamo, le velocità rappresentano le componenti cartesiane lungo l'asse  $x$ . Essendo  $V_B = 0$ , si ha:

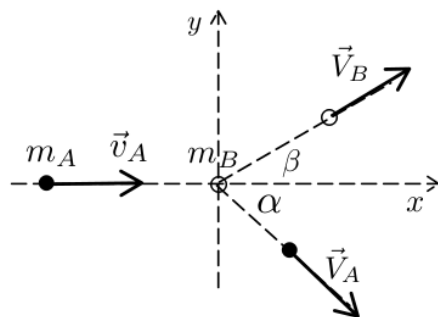
$$(m_B - m_A)v_B + 2m_A v_A = 0 \Rightarrow v_B = \frac{2m_A v_A}{m_A - m_B} = -2.4 \text{ m/s}$$

$$V_A = \frac{(2 - 3) \cdot 0.6 + 2 \cdot 3 \cdot (-2.4)}{2 + 3} = -3 \text{ m/s}$$

#### 4.4.9

Su un piano orizzontale liscio un oggetto di massa  $m_A = \dots$  che si muove con velocità  $v_A = \dots$  urta elasticamente un oggetto fermo di massa  $m_B = \dots$  (diversa da  $m_A$ ). Dopo l'urto le velocità dei due oggetti  $V_A$  e  $V_B$  formano rispettivamente gli angoli  $\alpha$  e  $\beta = \dots$  rispetto alla direzione di  $\vec{v}_A$ . Calcolare  $\alpha$ ,  $V_A$  e  $V_B$ .

#### Soluzione



$$\begin{aligned}
 m_A &= 4 \text{ kg}, \quad v_A = 10 \text{ m/s} \\
 m_B &= 3 \text{ kg}, \quad \beta = 20^\circ \\
 \alpha &=? \quad V_A = ? \quad V_B = ?
 \end{aligned}$$

Si tratta di un urto elastico tra due oggetti, che per semplicità consideriamo puntiformi, di cui uno inizialmente fermo. Possiamo quindi utilizzare i noti risultati forniti dalle equazioni (4.14)

Poniamo  $r = m_B/m_A = 3/4 = 0.75$  e, per prima cosa, ricaviamo  $V_B$ .

$$V_B = \frac{2v_A}{r+1} \cos \beta = \frac{2 \cdot 10}{0.75+1} \cos 20^\circ = 10.739 \text{ m/s}$$

Tramite  $V_B$  e  $\beta$  ricaviamo  $V_A$ .

$$V_A = \sqrt{v_A^2 - rV_B^2} = \sqrt{10^2 - 0.75 \cdot 10.739^2} = 3.675 \text{ m/s}$$

Infine, tramite  $V_A$ ,  $V_B$  e  $\beta$ , ricaviamo  $\alpha$ .

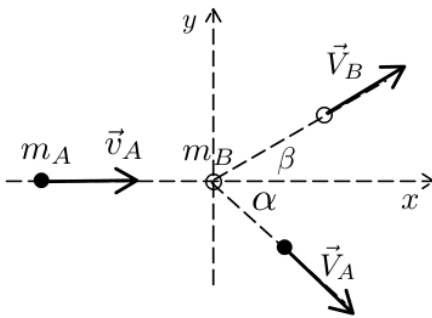
$$\cos \alpha = \frac{v_A - rV_B \cos \beta}{V_A} = 0.6616 \Rightarrow \alpha = \cos^{-1} 0.6616 = 48.58^\circ$$

## 4.4.10

Su un piano orizzontale liscio un oggetto di massa  $m_A = \dots$  che si muove con velocità  $v_A = \dots$  urta elasticamente un oggetto fermo di massa  $m_B = \dots$  (diversa da  $m_A$ ). Dopo l'urto le velocità dei due oggetti  $V_A$  e  $V_B$  formano rispettivamente gli angoli  $\alpha = \dots$  e  $\beta$  rispetto alla direzione di  $\vec{v}_A$ . Calcolare  $\beta$ ,  $V_A$  e  $V_B$ .

Rappresentare graficamente l'urto proposto considerando gli oggetti di forma sferica, entrambi di raggio  $R = \dots$ , e determinare il parametro d'urto che produrrebbe i valori calcolati degli angoli  $\alpha$  e  $\beta$ .

## Soluzione



$$m_A = 4 \text{ kg}, v_A = 10 \text{ m/s}$$

$$m_B = 3 \text{ kg}, \alpha = 37^\circ$$

$$\beta = ? \quad V_A = ? \quad V_B = ?$$

Si tratta di un urto elastico tra due oggetti, che per il momento consideriamo puntiformi, di cui uno inizialmente fermo. Possiamo quindi utilizzare i noti risultati forniti dalle equazioni (4.15)

Poniamo  $r = m_B/m_A = 3/4 = 0.75$  e, per prima cosa, ricaviamo  $V_A$ .

$$V_A = v_A \frac{\cos \alpha \pm \sqrt{r^2 - \sin^2 \alpha}}{r + 1} = 10 \frac{\cos 37^\circ \pm \sqrt{0.75^2 - \sin^2 37^\circ}}{0.75 + 1}$$

Con i due segni  $+$  e  $-$  otteniamo rispettivamente:

$$V_A^+ = 7.1212 \text{ m/s}, V_A^- = 2.006 \text{ m/s}$$

Tramite  $V_A^\pm$  e  $\alpha$  ricaviamo  $V_B^\pm = \sqrt{\frac{v_A^2 - (V_A^\pm)^2}{r}}$ , ovvero:

$$V_B^+ = 8.1067 \text{ m/s}, V_B^- = 11.3123 \text{ m/s}$$

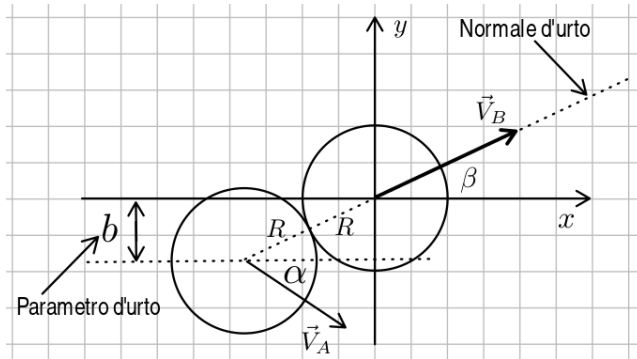
Infine, tramite  $V_A^\pm$ ,  $V_B^\pm$  e  $\alpha$ , ricaviamo  $\beta^\pm = \cos^{-1} \left( \frac{v_A - V_A^\pm \cos \alpha}{r V_B^\pm} \right)$ , ovvero:

$$\beta^+ = 44.819^\circ, \quad \beta^- = 8.1809^\circ$$

Considerando gli oggetti di forma sferica, entrambi di raggio  $R = 1 \text{ m}$ , in riferimento allo schema in figura, il parametro d'urto si può calcolare come:

$$b = 2R \sin \beta$$

Questo perchè, essendo la sfera di massa  $m_B$  inizialmente ferma, la sua velocità dopo l'urto  $\vec{V}_B$  sarà parallela alla "normale d'urto" (Def. 4.24).



Come abbiamo visto, nel problema proposto, fissato  $\alpha$  esistono due valori distinti di  $\beta$  corrispondenti, entrambi accettabili, che si potranno ottenere con i seguenti valori del parametro d'urto:

$$b^+ = 2R \sin \beta^+ = 1,4097 \text{ m}, \quad b^- = 2R \sin \beta^- = 0,2846 \text{ m}$$

La schematizzazione dei due casi, ottenuta tramite simulazione numerica, è rappresentata nella figura seguente.

