

Indice

1	Grandezze fisiche e misure	5
1.1	Concetti generali	5
1.2	Analisi degli errori	13
2	Statica	19
2.1	La forza	19
2.2	Classificazione delle forze	20
2.3	L'equilibrio del punto materiale	25
2.4	Il momento di una forza	31
2.5	Sistemi di forze	35
2.6	L'equilibrio del corpo rigido	40
2.7	L'equilibrio dei fluidi	48
3	Cinematica	57
3.1	Il moto in una dimensione	57
3.2	Il moto uniforme (1D)	64
3.3	Il moto uniformemente accelerato (1D)	69
3.4	Il moto nel piano cartesiano	76
3.5	Il moto di un proiettile	80
3.6	Il moto circolare	86
3.7	Il moto armonico	92
3.8	Moti relativi di sistemi di riferimento	100
4	Dinamica	109
4.1	I princìpi della dinamica	109
4.2	Dinamica del punto materiale	110
4.2.1	Problemi su fili tesi o piani inclinati	110
4.2.2	Problemi sulla forza di attrito radente	116
4.2.3	Problemi sul moto circolare	124
4.2.4	Problemi sul moto di gravi con attrito viscoso	127
4.2.5	Problemi sulla forza elastica	136
4.2.6	Problemi vari sulla dinamica del punto materiale	146
4.2.7	Il lavoro e la potenza	147

4.2.8	L'energia cinetica	151
4.2.9	L'energia potenziale	152
4.2.10	L'energia meccanica e la sua conservazione	156
4.2.11	La quantità di moto e l'impulso	161
4.2.12	Il momento angolare e l'impulso angolare	164
4.3	Sistemi non inerziali e forze apparenti	169
4.4	Dinamica dei sistemi di punti materiali	171
4.4.1	Sistema "laboratorio" e sistema "centro di massa"	179
4.4.2	Conservazione dell'energia	180
4.4.3	Conservazione della quantità di moto	181
4.4.4	Conservazione del momento angolare	181
4.4.5	Sistemi di due particelle e urti	181
4.5	Dinamica del corpo rigido	200
4.6	Gravitazione	220
4.7	Dinamica dei fluidi	230
5	Strumenti matematici	241
5.1	Algebra	241
5.2	Geometria euclidea nel piano	246
5.3	Geometria analitica nel piano	247
5.4	Coniche	252
5.5	Funzioni esponenziali e logaritmiche	261
5.6	Funzioni goniometriche	262
5.7	Trigonometria	268
5.8	Vettori	270
5.8.1	Rappresentazione cartesiana dei vettori	272
5.9	Disequazioni e studio del segno	277
5.10	Analisi matematica	283
5.10.1	Limiti	284
5.10.2	Derivate	292
5.10.3	Integrali	295
5.10.4	Equazioni differenziali ordinarie	304
5.10.5	Serie di Taylor	307
6	Strumenti informatici	309
6.1	Gnuplot	309
6.1.1	Grafici di funzioni definite a tratti	311
6.1.2	Grafici di più funzioni nello stesso piano	311
6.1.3	Superfici nello spazio	312
6.1.4	Grafici di dati da file	313
6.1.5	Animazioni	315
6.2	Tracker	316
6.2.1	Utilizzo di base	316

7	Approfondimenti	323
7.1	Esempi di sistemi di forze equivalenti	323
7.2	Gruppi, Campi e Spazi Vettoriali	326
7.3	Funzioni in più variabili	328
7.4	Angolo solido, flusso e teorema di Gauss	331
8	Formulari e dati notevoli	335
8.1	Formule di geometria piana	335
8.2	Formule di algebra	336
8.3	Definizioni e dati di interesse scientifico	336

Argomenti di livello avanzato

1	Equazioni della statica dei fluidi (derivate parziali)	50
2	Moti relativi (derivate)	101
3	Moto con attrito viscoso (1) (equaz. diff. e serie di Taylor) . .	127
4	Moto con attrito viscoso (2) (equaz. diff. e serie di Taylor) . .	129
5	Risonanza meccanica (integrali ed equazioni differenziali) . . .	140
6	Campo di forza proporzionale a $1/r^2$ (calcolo integrale)	155
7	Dall'energia potenziale alla forza (derivate parziali)	156
8	Lavoro della forza d'attrito (calcolo integrale)	158
9	Centro di massa (calcolo integrale)	176
10	Potenziale da campo di forza (calcolo integrale)	237
11	Equazioni differenziali ordinarie	304
12	Serie di Taylor	307
13	Gruppi, Campi e Spazi Vettoriali	326
14	Funzioni in più variabili	328
15	Angolo solido, flusso e teorema di Gauss	331

Attività di laboratorio

1	Python/Gnuplot. Simulazione di un moto armonico	96
2	Gnuplot. Grafici orari del moto con attrito viscoso	129
3	Gnuplot. Moto balistico con attrito viscoso	134
4	Tracker: Risonanza meccanica	140
5	Gnuplot. Urto elastico in 2D di due sfere: una inizialmente ferma	196
6	Gnuplot. Urto elastico in 2D di due sfere	198

Introduzione

I concetti basilari espressi in questo libro sono sistematicamente presentati come enunciati (espressioni formali valutabili come vere o false), classificati nelle seguenti categorie:

Proprietà	enunciati verificabili tramite una dimostrazione formale.
Teoremi	proprietà di particolare rilevanza o generalità.
Principi	enunciati la cui verità è in qualche modo evidente; pertanto non richiedono dimostrazioni.
Leggi fisiche	enunciati verificati da una dimostrazione sperimentale (vedi “metodo scientifico”).
Definizioni	accordi formali specifici e non ambigui; generalmente non richiedono alcuna dimostrazione.
Regole	enunciati costituiti da sequenze finite di istruzioni, programmate per il raggiungimento di un determinato risultato; possono richiedere dimostrazioni che giustificano determinate sequenze.

Molte proprietà sono dimostrate in dettaglio. Alcuni risultati (pochi in realtà) sono forniti senza dimostrazione, o perché si dimostrano facilmente oppure perché richiedono conoscenze che vanno oltre i contenuti previsti.

Nel primo capitolo sono introdotti i concetti generali della fisica e sviluppate le nozioni basilari sull’analisi degli errori nelle misure sperimentali.

Nei capitoli dal secondo al quarto vengono trattate le principali branche della Meccanica, nell’ordine: Statica, Cinematica e Dinamica.

Il quinto ed il sesto capitolo contengono rispettivamente gli “strumenti matematici e informatici”, spesso richiamati nelle pagine precedenti, presentati come necessario supporto formale alla fisica.

Il settimo capitolo contiene approfondimenti su argomenti che, a livello di scuola secondaria, potrebbero interessare alunni particolarmente curiosi o docenti intenzionati a proporre attività di potenziamento.

L'ottavo, breve, capitolo conclude il testo con una raccolta di formulari e risultati di notevole interesse scientifico.

Al termine di molte sezioni sono proposti dei problemi o delle schede di laboratorio, quasi sempre con dati da scegliere a piacere, seguiti da soluzioni esplicative. Sia i problemi che le schede sono impostati in modo da risultare significativi per il tema trattato.

Nella risoluzione dei problemi è stato utilizzato il seguente schema concettuale.

- (1) Schema grafico del sistema fisico.
- (2) Dati e incognite.
- (3) Impostazione delle equazioni.
- (4) Risoluzione delle equazioni.

I dettagli sono riportati nella seguente tabella.

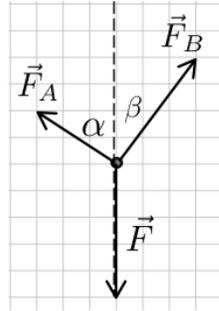
(1) Rappresentare con uno schema grafico, semplice ma esauriente, il sistema fisico descritto dal problema.	Nello schema grafico riportare le lettere scelte per tutte le grandezze coinvolte nel problema, non i valori numerici .
(2) Riportare in una tabella le grandezze coinvolte nel problema, le stesse riportate nello schema del punto (1) , più eventualmente altre.	Utilizzare le stesse lettere riportate nello schema, specificando i valori numerici noti (possibilmente nel SI) ed indicando con ? quelli incogniti.
(3) Iniziare lo svolgimento scrivendo le appropriate leggi fisiche (o proprietà o definizioni) che contengano le grandezze scelte (note e incognite), le stesse riportate nella tabella del punto (2) , più eventualmente altre.	Le relazioni scritte diventeranno equazioni da risolvere; il problema fisico deve essere tradotto in un problema matematico.
(4) Risolvere le equazioni e riportare le soluzioni alla fine con le corrette unità di misura (queste si possono omettere nei passaggi intermedi).	Le equazioni vanno risolte possibilmente in forma letterale con le sostituzioni numeriche eseguite il meno possibile, idealmente solo alla fine.

La procedura descritta è ovviamente flessibile, ad esempio durante l'esecuzione dei punti (3) e (4) può essere utile ritornare ai punti (1) o (2) per aggiungere/cancellare/modificare dati o rappresentazioni grafiche.

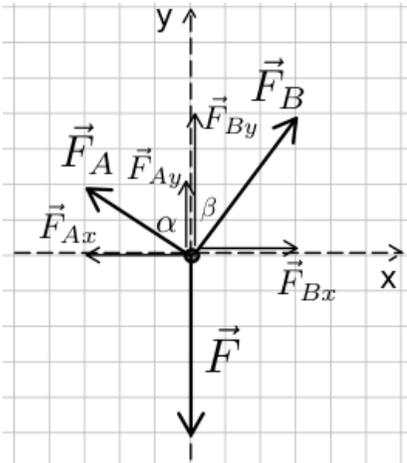
PROBLEMI

2.3.1

Ad un punto materiale in equilibrio sono applicate le forze \vec{F} , \vec{F}_A ed \vec{F}_B . Scegliere a piacere i moduli delle forze e calcolare gli angoli α e β che formano rispettivamente \vec{F}_A ed \vec{F}_B rispetto alla retta d'azione di \vec{F} .



Soluzione



$$\begin{aligned} F &= 6 \text{ N} \\ F_A &= 4 \text{ N} \\ F_B &= 5 \text{ N} \\ \alpha &=? \\ \beta &=? \end{aligned}$$

Applichiamo la condizione di equilibrio del punto materiale (Legge 2.10)

$$\vec{F} + \vec{F}_A + \vec{F}_B = 0$$

Si tratta di una equazione vettoriale che, utilizzando la rappresentazione cartesiana dei vettori nel riferimento rappresentato in figura, si traduce in due equazioni scalari corrispondenti alle due componenti cartesiane x e y dei vettori.

$$\text{componenti } x : F_x + F_{Ax} + F_{Bx} = 0$$

$$\text{componenti } y : F_y + F_{Ay} + F_{By} = 0$$

ovvero

$$\text{comp. } x : 0 - F_A \sin \alpha + F_B \sin \beta = 0$$

$$\text{comp. } y : -F + F_A \cos \alpha + F_B \cos \beta = 0$$

Le ultime due equazioni costituiscono un sistema di due equazioni nelle due incognite α e β , che può essere risolto con opportune sostituzioni. Iniziamo spostando a destra tutti i termini che non contengono l'incognita β

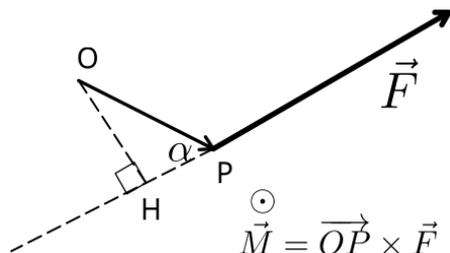
$$F_B \sin \beta = F_A \sin \alpha \quad (*)$$

$$F_B \cos \beta = F - F_A \cos \alpha$$

Ora eleviamo al quadrato entrambi i membri nelle due equazioni.

2.4 Il momento di una forza

Definizione 2.7 (momento di una forza) Data una forza \vec{F} applicata nel punto P e dato un punto O , detto “polo”, si definisce “momento di \vec{F} rispetto ad O ” la grandezza fisica vettoriale $\vec{M} = \vec{OP} \times \vec{F}$.



Se \overline{OH} è la distanza di O dalla retta d'azione di \vec{F} , detta **braccio della forza**, allora il modulo del momento si può scrivere come:

$$M = \overline{OP} \cdot F \cdot \sin \alpha = \overline{OH} \cdot F$$

Se \vec{OP} ed \vec{F} sono nel piano del foglio allora il momento \vec{M} sarà perpendicolare al foglio, entrante od uscente a seconda dei casi; nell'esempio in figura $\vec{M} = \vec{OP} \times \vec{F}$ risulta uscente (vedi la “regola della mano destra” nel prodotto vettoriale (Def. 5.26)).

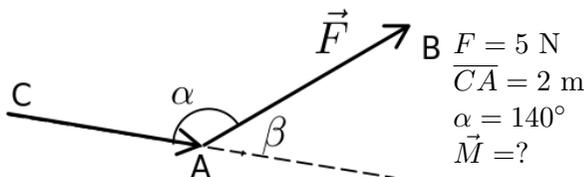
PROBLEMI

2.4.1

Data una forza $\vec{F} = \vec{AB}$, considerare un punto C tale che il segmento CA formi un angolo α con AB . Scegliere a piacere i valori di F , \overline{CA} ed α . Determinare il momento \vec{M} di \vec{F} rispetto a C .

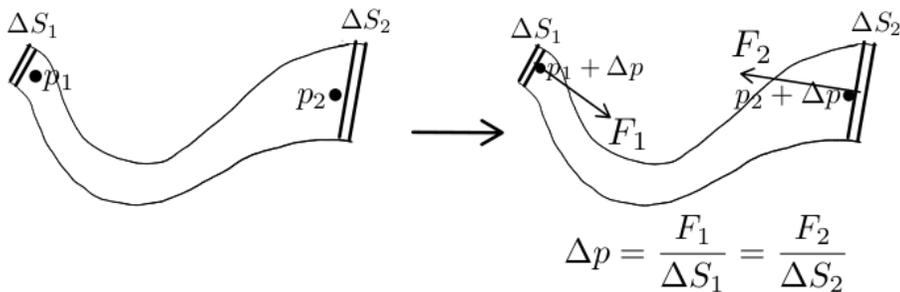
Soluzione

Versione 1

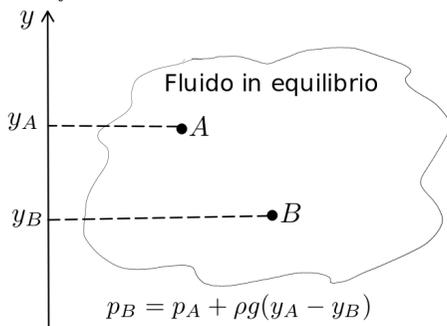


Per la regola della mano destra (Definizione 5.26) il momento $\vec{M} = \vec{CA} \times \vec{F}$ è un vettore uscente \odot . Inoltre, poichè l'angolo compreso tra \vec{CA} ed \vec{F} è $\beta = 180^\circ - \alpha = 40^\circ$, $M = \overline{CA} F \sin \beta = 2 \cdot 5 \cdot \sin 40^\circ = 6.43$ N·m

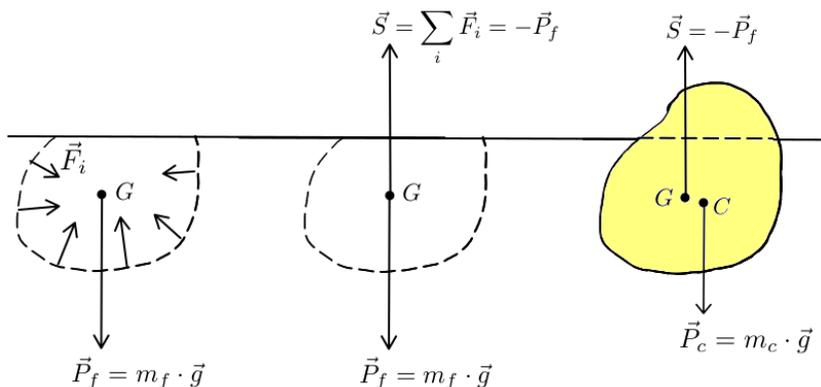
Legge fisica 2.12 (legge di Pascal) *La variazione di pressione prodotta in un punto all'interno di un fluido in equilibrio si trasmette inalterata in tutti gli altri punti del fluido.*



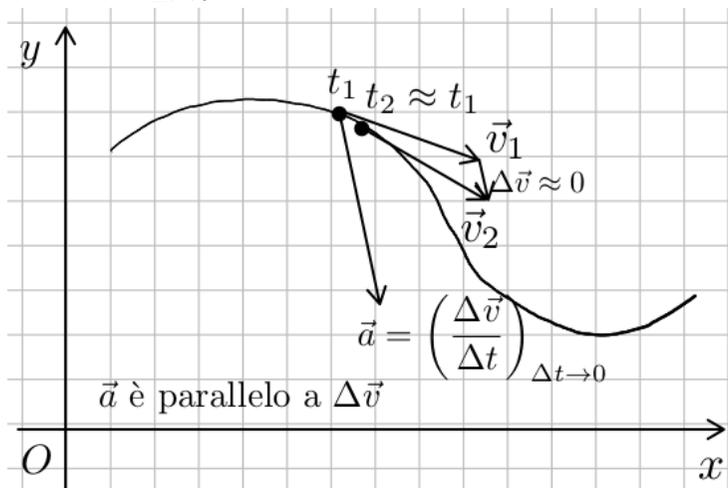
Legge fisica 2.13 (legge di Stevino) *Le pressioni in due punti A e B all'interno di un fluido in equilibrio, sottoposto all'azione della forza peso, sono tali che $p_B = p_A + \rho g(y_A - y_B)$, dove ρ è la densità del fluido, g è l'accelerazione di gravità e y_A, y_B sono le coordinate dei punti A e B in un riferimento verticale orientato verso l'alto.*



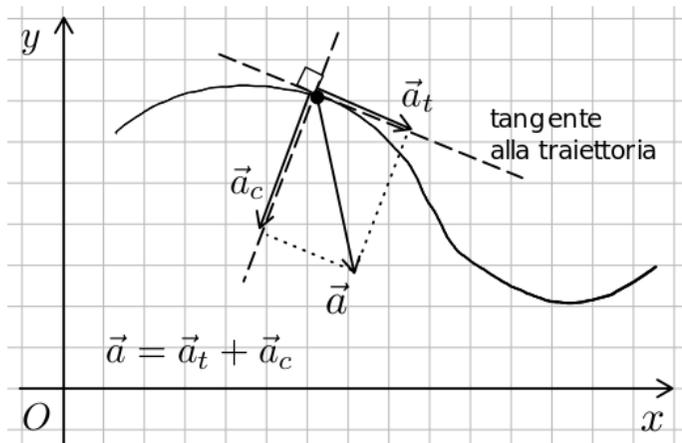
Legge fisica 2.14 (legge di Archimede) *Un corpo immerso in un fluido riceve una spinta dal basso verso l'alto di intensità uguale al peso del fluido spostato.*



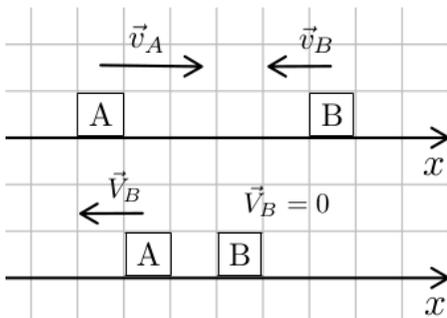
$$\vec{a} = \left(\frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \right)_{\Delta t \rightarrow 0} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$



Definizione 3.16 (componenti dell'accelerazione) *L'accelerazione istantanea \vec{a} di un oggetto, in un piano cartesiano, si può scomporre in una componente \vec{a}_t tangente alla traiettoria, detta "componente tangenziale", ed in una componente normale alla tangente \vec{a}_c , detta "componente centripeta".*



Proprietà 3.10 (circonferenza osculatrice) *È possibile approssimare un piccolo tratto, intorno ad un punto P , di una traiettoria non rettilinea con un'unica circonferenza, detta "circonferenza osculatrice", avente il raggio per P perpendicolare alla tangente alla traiettoria per P ; in altri termini, la circonferenza osculatrice è la circonferenza passante per tre punti molto vicini a P .*



$$\begin{aligned}
 m_A &= 2 \text{ kg}, \\
 v_A &= 0.6 \text{ m/s (comp. } x) \\
 m_B &= 3 \text{ kg}, \quad V_B = 0 \text{ m/s} \\
 v_B &=? \text{ (comp. } x) \\
 V_A &=? \text{ (comp. } x)
 \end{aligned}$$

In riferimento allo schema riportato in figura, utilizziamo le relazioni note nel caso di urto elastico centrale normale.

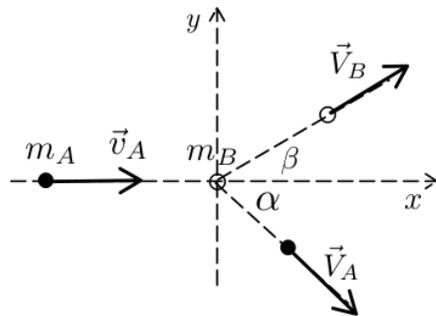
$$V_A = \frac{(m_A - m_B)v_A + 2m_B v_B}{m_1 + m_2}; \quad V_2 = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2}$$

dove, ribadiamo, le velocità rappresentano le componenti cartesiane lungo l'asse x .

4.4.9

Su un piano orizzontale liscio un oggetto di massa $m_A = \dots$ che si muove con velocità $v_A = \dots$ urta elasticamente un oggetto fermo di massa $m_B = \dots$ (diversa da m_A). Dopo l'urto le velocità dei due oggetti V_A e V_B formano rispettivamente gli angoli α e $\beta = \dots$ rispetto alla direzione di \vec{v}_A . Calcolare α , V_A e V_B .

Soluzione



$$\begin{aligned}
 m_A &= 4 \text{ kg}, \quad v_A = 10 \text{ m/s} \\
 m_B &= 3 \text{ kg}, \quad \beta = 20^\circ \\
 \alpha &=? \quad V_A = ? \quad V_B = ?
 \end{aligned}$$

Si tratta di un urto elastico tra due oggetti, che per semplicità consideriamo puntiformi, di cui uno inizialmente fermo. Possiamo quindi utilizzare i noti risultati forniti dalle equazioni (4.14)

Poniamo $r = m_B/m_A = 3/4 = 0.75$ e, per prima cosa, ricaviamo V_B .

$$V_B = \frac{2v_A}{r+1} \cos \beta = \frac{2 \cdot 10}{0.75+1} \cos 20^\circ = 10.739 \text{ m/s}$$

Tramite V_B e β ricaviamo V_A .

$$V_A = \sqrt{v_A^2 - rV_B^2} = \sqrt{10^2 - 0.75 \cdot 10.739^2} = 3.675 \text{ m/s}$$

Infine, tramite V_A , V_B e β , ricaviamo α .

$$\cos \alpha = \frac{v_A - rV_B \cos \beta}{V_A} = 0.6616 \Rightarrow \alpha = \cos^{-1} 0.6616 = 48.58^\circ$$

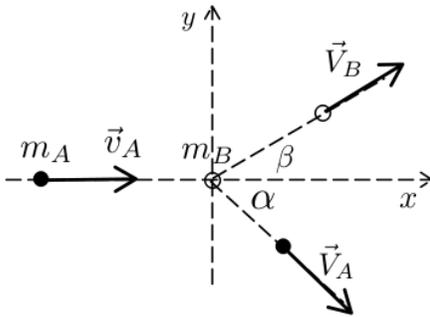
4.4.10

Su un piano orizzontale liscio un oggetto di massa $m_A = \dots$ che si muove con velocità $v_A = \dots$ urta elasticamente un oggetto fermo

di massa $m_B = \dots$ (diversa da m_A). Dopo l'urto le velocità dei due oggetti V_A e V_B formano rispettivamente gli angoli $\alpha = \dots$ e β rispetto alla direzione di \vec{v}_A . Calcolare β , V_A e V_B .

Rappresentare graficamente l'urto proposto considerando gli oggetti di forma sferica, entrambi di raggio $R = \dots$, e determinare il parametro d'urto che produrrebbe i valori calcolati degli angoli α e β .

Soluzione



$$m_A = 4 \text{ kg}, v_A = 10 \text{ m/s}$$

$$m_B = 3 \text{ kg}, \alpha = 37^\circ$$

$$\beta = ? \quad V_A = ? \quad V_B = ?$$

Si tratta di un urto elastico tra due oggetti, che per il momento consideriamo puntiformi, di cui uno inizialmente fermo. Possiamo quindi utilizzare i noti risultati forniti dalle equazioni (4.15)

Poniamo $r = m_B/m_A = 3/4 = 0.75$ e, per prima cosa, ricaviamo V_A .

$$V_A = v_A \frac{\cos \alpha \pm \sqrt{r^2 - \sin^2 \alpha}}{r + 1} = 10 \frac{\cos 37^\circ \pm \sqrt{0.75^2 - \sin^2 37^\circ}}{0.75 + 1}$$

Con i due segni + e - otteniamo rispettivamente:

$$V_A^+ = 7.1212 \text{ m/s}, V_A^- = 2.006 \text{ m/s}$$

Tramite V_A^\pm e α ricaviamo $V_B^\pm = \sqrt{\frac{v_A^2 - (V_A^\pm)^2}{r}}$, ovvero:

$$V_B^+ = 8.1067 \text{ m/s}, V_B^- = 11.3123 \text{ m/s}$$

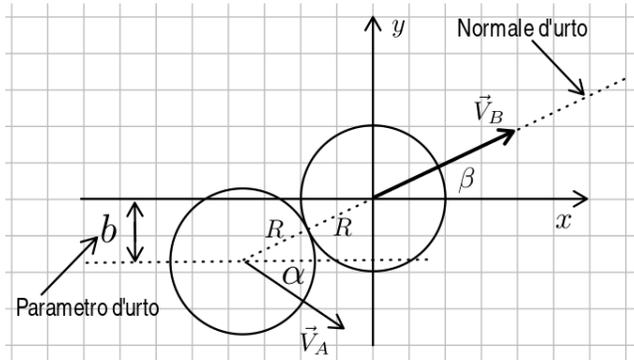
Infine, tramite V_A^\pm , V_B^\pm e α , ricaviamo $\beta^\pm = \cos^{-1} \left(\frac{v_A - V_A^\pm \cos \alpha}{r V_B^\pm} \right)$, ovvero:

$$\beta^+ = 44.819^\circ, \quad \beta^- = 8.1809^\circ$$

Considerando gli oggetti di forma sferica, entrambi di raggio $R = 1 \text{ m}$, in riferimento allo schema in figura, il parametro d'urto si può calcolare come:

$$b = 2R \sin \beta$$

Questo perchè, essendo la sfera di massa m_B inizialmente ferma, la sua velocità dopo l'urto \vec{V}_B sarà parallela alla "normale d'urto" (Def. 4.24).



Come abbiamo visto, nel problema proposto, fissato α esistono due valori distinti di β corrispondenti, entrambi accettabili, che si potranno ottenere con i seguenti valori del parametro d'urto:

$$b^+ = 2R \sin \beta^+ = 1,4097 \text{ m}, \quad b^- = 2R \sin \beta^- = 0,2846 \text{ m}$$

La schematizzazione dei due casi, ottenuta tramite simulazione numerica, è rappresentata nella figura seguente.

