Strumenti matematici per la scuola secondaria

Michele Tuttafesta

Indice

1 Strumenti matematici **5**
1.1 Aritmetica 5
1.2 Algebra 12
1.3 Calcolo combinatorio 23
1.4 Matrici e determinanti 27
1.5 Sistemi lineari 34
1.6 Numeri complessi 36
1.7 Geometria euclidea nel piano 40
1.8 Geometria analitica nel piano 46
1.9 Trasformazioni geometriche 51
1.10 Coniche 57
1.11 Geometria euclidea nello spazio 70
1.12 Geometria analitica nello spazio 74
1.13 Funzioni esponenziali e logaritmiche 77
1.14 Funzioni goniometriche 78
1.15 Trigonometria 84
1.16 Vettori 86
1.16.1 Rappresentazione cartesiana dei vettori 88
1.17 Disequazioni e studio del segno 93
1.18 Analisi matematica 99
1.18.1 Relazioni 99
1.18.2 Successioni 102
1.18.3 Funzioni reali di variabile reale 103
1.18.4 Limiti 106
1.18.5 Derivate 116
1.18.6 Integrali 128
1.18.7 Equazioni differenziali ordinarie 137
1.18.8 Serie di Taylor 140
1.19 Statistica 142
1.20 Probabilità 144
1.21 Distribuzioni di probabilità 146
1.21.1 Distribuzione binomiale 147

1.21.2 Distribuzione di Poisson 149
1.21.3 Distribuzione normale 151

2 LaTeX **155**
2.0.1 Modo matematico vs. modo testo 155
2.0.2 Immagini 156
2.0.3 Stili di carattere 156
2.0.4 Spazi, paragrafi e commenti 157
2.0.5 Parentesi 157
2.0.6 Liste 157
2.0.7 Simboli (in modo matematico) 159
2.0.8 Simboli (in modo testo) 163
2.0.9 Modelli (templates) 163

3 Approfondimenti **167**
3.1 Aritmetica modulare 167
3.2 Completezza in $\mathbb{R}$ e in $\mathbb{Q}$, estremo superiore/inferiore . . . 170
3.3 Gruppi, Campi e Spazi Vettoriali 171
3.4 Sezione aurea e successione di Fibonacci 173
3.5 Funzioni in più variabili 174
3.6 Angolo solido, flusso e teorema di Gauss 177
3.7 Flusso su superfici chiuse e divergenza 180
3.8 Circuitazione e rotore 182

4 Formulari e dati notevoli **185**
4.1 Formule di geometria piana 185
4.2 Formule di algebra 186
4.3 Definizioni e dati di interesse scientifico 186

Argomenti di livello avanzato

1 Equazioni differenziali ordinarie 137
2 Serie di Taylor 140
3 Aritmetica modulare 167
4 Gruppi, Campi e Spazi Vettoriali 171
5 Funzioni in più variabili 174
6 Angolo solido, flusso e teorema di Gauss 177
7 Flusso su superfici chiuse e divergenza 180
8 Circuitazione e rotore 182

Prefazione

Cari lettori, “Strumenti matematici per la scuola secondaria” potrebbe far immaginare pile di numeri, equazioni e teoremi pronti a saltarvi addosso. Ma fidatevi, questo libro è più simile ad una mappa del tesoro, pensato per guidarvi attraverso il vasto mondo della matematica con sicurezza e, perché no, anche con un pò di divertimento.

Questo libro non cerca di convincervi che la matematica serve nella vita e che può essere bella (anche se lo è!). Presuppone che siate già motivati: che siate studenti curiosi di capire meglio, docenti alla ricerca di nuovi strumenti o semplicemente appassionati pronti a immergervi in questo mare di formule e idee.

L'intento è semplice: offrirvi un compagno di studio pratico e completo, qualcosa da consultare quando avete un dubbio o non ricordate una definizione, una proprietà, un risultato notevole o quando vi serve un'idea per risolvere un problema. Qui troverete un pò di tutto: enunciati ordinati, dimostrazioni accessibili, problemi significativi o intriganti, approfondimenti per chi vuole andare oltre lo standard scolastico.

Per gli studenti questo libro sarà una cassetta degli attrezzi ideale per il ripasso, lo studio quotidiano o il tanto temuto esame finale. Per i docenti sarà uno strumento di agile consultazione (grazie anche al dettagliato indice) per costruire unità didattiche chiare, complete e focalizzate, senza dispersioni, intorno al nucleo di ogni argomento.

Desidero ringraziare tutti coloro che hanno contribuito alla mia formazione matematica. Scuola elementare: Giuseppe Chiauzzi (aritmetica e geometria). Scuola media: Antonio Luisi (aritmetica, algebra e geometria). Università: Irene Sisto (analisi matematica), Biagio Casciaro (algebra lineare e geometria), Nicola Cufaro e Adriano Massaro (analisi complessa), Gianpiero Colonna (calcolo numerico).

Ora, mettetevi comodi (ma non troppo, la matematica richiede concentrazione!), affilate le vostre matite o attivate i vostri sistemi informatici e provate a scoprire ciò che con la matematica pensavate non si potesse fare. Potete riuscirci e probabilmente vi piacerà.

Michele Tuttafesta

Introduzione

I concetti basilari espressi in questo libro sono sistematicamente presentati come enunciati (espressioni formali valutabili come vere o false), classificati nelle seguenti categorie:

Proprietà	enunciati verificabili tramite una dimostrazione formale.
Teoremi	proprietà di particolare rilevanza o generalità.
Princìpi	enunciati la cui verità è in qualche modo evidente; pertanto non richiedono dimostrazioni.
Definizioni	accordi formali specifici e non ambigui; generalmente non richiedono alcuna dimostrazione.
Regole	enunciati costituiti da sequenze finite di istruzioni, programmate per il raggiungimento di un determinato risultato; possono richiedere dimostrazioni che giustifichino determinate sequenze.

Molte proprietà sono dimostrate in dettaglio. Alcuni risultati (pochi in realtà) sono forniti senza dimostrazione, o perché si dimostrano facilmente oppure perché richiedono conoscenze che vanno oltre i contenuti previsti.

Nel primo capitolo gli "strumenti matematici" sono suddivisi in sezioni dal titolo auto-esplicativo: Aritmetica, Algebra, Geometria..., Vettori, Trigonometria, Analisi, ecc.

Il secondo capitolo contiene una breve introduzione al fantastico LaTeX, un sistema di videoscrittura di incomparabile eleganza e potenza, progettato per la composizione tipografica avanzata e universalmente acclamato per la sua capacità di produrre documenti di qualità editoriale impeccabile. Creato nel 1984 da Leslie Lamport come un'estensione del sistema di composizione tipografica TeX ideato da Donald Knuth, LaTeX è diventato lo standard de facto per la redazione di articoli scientifici. La sua importanza nella comunità matematica e scientifica non ha eguali, grazie alla capacità di gestire formule matematiche complesse con una chiarezza e una precisione ineguagliabili. In un'epoca dominata dalla semplificazione e dall'estetica digitale standardizzata, LaTeX rimane un

faro di rigore intellettuale e bellezza tipografica.

Il terzo capitolo contiene approfondimenti su argomenti che, a livello di scuola secondaria, potrebbero interessare alunni particolarmente curiosi o docenti intenzionati a proporre attività di potenziamento.

Il quarto, breve, capitolo conclude il testo con una raccolta di formulari e risultati di notevole interesse scientifico.

Al termine di molte sezioni sono proposti dei problemi, quasi sempre con dati da scegliere a piacere, seguiti da soluzioni esplicative. Sono problemi impostati in modo da risultare significativi per il tema trattato, anche se in totale non sono numerosi. Una casistica più ricca di problemi ed esempi, oltre a trattazioni teoriche alternative rispetto a quelle proposte in questo libro, può essere trovata negli ottimi testi di Domenico D'Ortenzi ([1],[2],[3]).

Capitolo 1

Strumenti matematici

O studianti, studiate le matematiche, e non edificate sanza fondamenti. La meccanica è il paradiso della matematica perché qui se ne possono cogliere i frutti. Non c'è certezza nella scienza se la matematica non può esservi applicata, o se non vi è comunque in relazione.

Leonardo da Vinci (1452-1519): inventore, artista, scienziato, uomo d'ingegno e talento universale.

Concetti primitivi: insieme, punto, retta, piano, spazio, lunghezza, superficie, movimento rigido.

1.1 Aritmetica

Definizione 1.1 (insiemi numerici) .

Denominazione	*Simbolo e specificazione*
Naturali	$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
Interi	$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$
Razionali	$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{n}{d} \middle\vert n, d \in \mathbb{Z}, d \neq 0 \right\} = \{\textit{Tutte le frazioni.}\}$
Irrazionali	$\mathbb{I} = \{\textit{Numeri che hanno rappresentazione decimale illimitata e non periodica.}\}$
Reali	$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$
Complessi	$\mathbb{C} = \{a + i \cdot b \vert\, a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$

É ovvio che: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Definizione 1.2 (divisibilità tra interi) *Siano n e d due interi. Si dice che d divide n o che n è divisibile per d (e si indica con $d|n$) se esiste un intero q tale che $n = q \cdot d$.*

Proprietà 1.1 (criteri di divisibilità) .

d	*Criterio affinché un intero n sia divisibile per d*
2	*La cifra delle unità deve essere pari, ovvero multipla di 2.*
3	*La somma delle cifre deve essere multiplo di 3.*
5	*La cifra delle unità deve essere 0 oppure 5.*
7	*Il valore assoluto della differenza tra il numero scritto senza la cifra delle unità e il doppio della cifra delle unità deve essere multiplo di 7.*
11	*Il valore assoluto della differenza tra la somma delle cifre di posto pari e la somma delle cifre di posto dispari deve essere multiplo di 11.*
13	*La somma tra il numero senza la cifra delle unità e quattro volte la cifra delle unità deve essere multiplo di 13.*
17	*Il valore assoluto della differenza tra il numero senza la cifra delle unità e cinque volte la cifra delle unità deve essere multiplo di 17.*
23	*La somma tra il numero senza la cifra delle unità e 7 volte la cifra delle unità deve essere multiplo di 23.*
37	*Si divide il numero in "terzetti". Se la somma di tutti i terzetti dà come risultato un multiplo di 37 allora il numero di partenza è divisibile per 37.* *In alternativa, si possono calcolare i resti delle divisioni per 37 dei vari terzetti e sommare infine tutti i resti ottenuti: se tale somma dà come risultato un multiplo di 37 allora il numero di partenza è divisibile per 37.*

Dimostrazione. Si veda la Sezione 3.1 e la Proprietà 3.3.
Esempi.
• Il numero 1003 è divisibile per 17 se lo è il numero $|100 - 5 \cdot 3| = 85$. Questo è divisibile per 17 se lo è il numero $|8 - 5 \cdot 5| = 17$.
• Il numero 514291749 è divisibile per 37 perché: $749 + 291 + 514 = 1554$ che è un multiplo di 37; ovvero, in alternativa, $749 = 20 \cdot 37 + 9$, $291 = 7 \cdot 37 + 32$, $514 = 13 \cdot 37 + 33$ e $9 + 32 + 33 = 74$ che è evidentemente un multiplo di 37.

Definizione 1.3 (numero primo) *Un numero primo è un numero naturale maggiore di 1 che sia divisibile solamente per 1 e per sé stesso.*

Poiché t e u sono primi tra loro, nessuno dei fattori di t è anche fattore di u e viceversa. Dalla relazione $Du^2 = t^2$ segue

$$r_1^{2i_1} r_2^{2i_2} \cdots r_s^{2i_s} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_n^{k_n} = q_1^{2h_1} q_2^{2h_2} \cdots q_m^{2h_m}$$

I fattori $p_1, p_2, \ldots, p_n$ devono tutti essere presenti a secondo membro, e dunque sono tutti distinti da $r_1, r_2, \ldots, r_s$, perché altrimenti t ed u avrebbero dei fattori comuni. Ma per ipotesi il fattore p_1 a primo membro ha esponente dispari, mentre tutti gli esponenti a secondo membro sono pari. Di conseguenza la relazione precedente non può sussistere e quindi la radice di D non può essere un numero razionale. ■

Osservazione. Questa dimostrazione si estende facilmente alle altre radici; ad esempio se D non è un cubo perfetto, la sua radice cubica è irrazionale. Infatti se fosse $\sqrt[3]{D} = \dfrac{t}{u}$, si giungerebbe alla relazione

$$r_1^{3i_1} r_2^{3i_2} \cdots r_s^{3i_s} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_n^{k_n} = q_1^{3h_1} q_2^{3h_2} \cdots q_m^{3h_m}$$

con k_1 non divisibile per 3 mentre tutti gli esponenti a secondo membro lo sono.

Al lettore il compito di sviluppare i dettagli, come pure di estendere la dimostrazione alle radici di qualsiasi ordine.

1.2 Algebra

Definizione 1.8 (espressione matematica) *Una espressione matematica è un insieme di numeri o simboli che sostituiscono numeri, tutti combinati tra loro tramite operazioni matematiche.*

Semplificare una espressione *significa trasformare l'espressione in modo da ridurre il numero di simboli o di operazioni in essa presenti, conservando il suo valore numerico complessivo.*

Proprietà 1.9 (legge dell'annullamento del prodotto) .

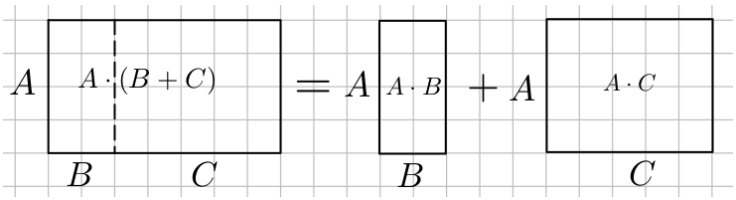
Due espressioni A e B danno prodotto zero se e solo se almeno una delle due vale zero, formalmente: $A \cdot B \Longleftrightarrow A = 0 \vee B = 0$

Proprietà 1.10 (proprietà distributiva) *Date le espressioni A, B, C, vale in generale la seguente uguaglianza:*

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

La suddetta uguaglianza: letta da sinistra a destra si chiama propriamente "proprietà distributiva", letta invece da destra a sinistra si chiama "raccolta a fattor comune" o "messa in evidenza".

Dimostrazione. Possiamo eseguire una dimostrazione geometrica associando i valori numerici delle espressioni A, B, C alle lunghezze dei lati di opportuni rettangoli, secondo il seguente schema.



Definizione 1.9 (potenza con esponente naturale) *Siano:* $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, *si definisce "potenza con esponente naturale" e si legge "a elevato a n, l'espressione:* $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ volte}}$ *se* $n \neq 0$, *mentre se* $n = 0$ *e* $a \neq 0$ *si pone per definizione:* $a^0 = 1$. *a si dice "base", n si dice "esponente".*

Proprietà 1.11 (potenza con esponente naturale) *Siano:* $a, b \in \mathbb{R}$, $m, n \in \mathbb{N}$, *si ricavano le seguenti proprietà.*

- **Prodotto di potenze con la stessa base**

  $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

  Dim. $a^n \cdot a^m = \underbrace{a \cdots a}_{n \text{ volte}} \cdot \underbrace{a \cdots a}_{m \text{ volte}} = \underbrace{a \cdots a \cdot a \cdots a}_{n+m \text{ volte}} = a^{n+m}$

- **Rapporto di potenze con la stessa base**

  $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ *se* $n \geq m$

  Dim. Se $n \geq m$: $\dfrac{a^n}{a^m} = \dfrac{\overbrace{\cancel{a} \cdots \cancel{a}}^{m \text{ volte}} \cdot \overbrace{a \cdots a}^{n-m \text{ volte}}}{\cancel{a^m}} = a^{n-m}$

- **Prodotto di potenze con lo stesso esponente**

  $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

  Dim. $a^n \cdot b^n = \underbrace{a \cdots a}_{n \text{ volte}} \cdot \underbrace{b \cdots b}_{n \text{ volte}} = \underbrace{(a \cdot b) \cdots (a \cdot b)}_{n \text{ volte}} = (a \cdot b)^n$

- **Rapporto di potenze con lo stesso esponente**

  $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$. *Dim.* $\dfrac{a^n}{b^n} = \dfrac{\overbrace{a \cdots a}^{n \text{ volte}}}{\underbrace{b \cdots b}_{n \text{ volte}}} = \underbrace{\dfrac{a}{b} \cdots \dfrac{a}{b}}_{n \text{ volte}} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$

- **Potenza di potenza**

  $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

  Dim. $(a^n)^m = \underbrace{a^n \cdots a^n}_{m \text{ volte}} = \underbrace{\overbrace{(a \cdots a)}^{n \text{ volte}} \cdots \overbrace{(a \cdots a)}^{n \text{ volte}}}_{n \cdot m \text{ volte}} = a^{n \cdot m}$

$$= \log_a(a^{\log_a x + \log_a y}) \stackrel{\text{def}}{=} \log_a x + \log_a y$$

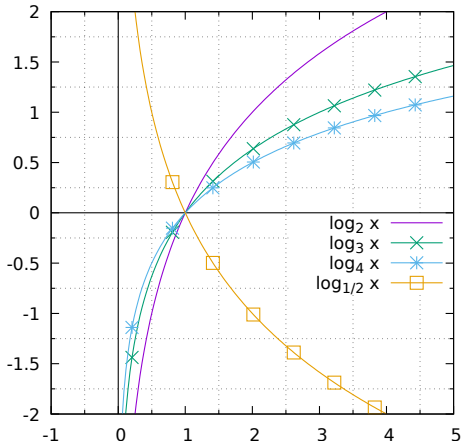
$$(4)\ \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x \cdot y^{-1}) \stackrel{3}{=} \log_a x + \log_a(y^{-1}) \stackrel{2}{=} \log_a x - \log_a y$$

$$(5)\ \log_b x \stackrel{1}{=} \log_b a^{\log_a x} \stackrel{2}{=} (\log_a x) \cdot \log_b a \Rightarrow \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \qquad \blacksquare$$

Definizione 1.80 (funzione logaritmica) *Si chiama funzione logaritmica ogni funzione del tipo $y = \log_a x$.*

Proprietà 1.73 (funzione logaritmica: crescenza/decrescenza)

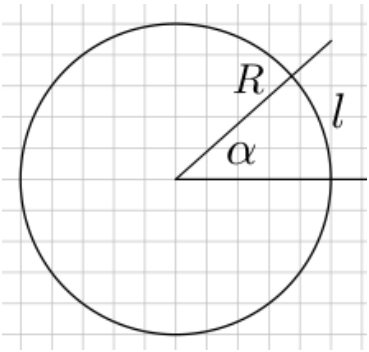
La funzione logaritmica $y = \log_a x$ è strettamente crescente o strettamente decrescente se rispettivamente $a > 1$ o $0 < a < 1$.



1.14 Funzioni goniometriche

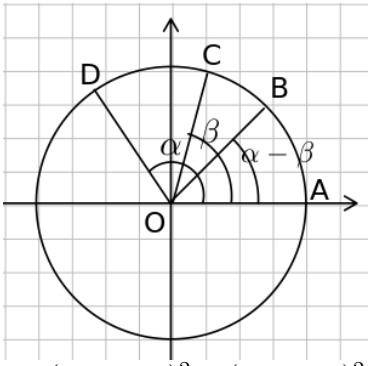
Definizione 1.81 (radiante) *La misura di un angolo α in radianti, simbolo rad, è definita come il rapporto tra la lunghezza l dell'arco, corrispondente ad α, preso su una qualsiasi circonferenza di raggio R centrata nel vertice dell'angolo, e la lunghezza del suddetto raggio; formalmente:*

$$\alpha = \frac{l}{R}\ rad$$



La conversione da unità sessagesimali a radianti o viceversa si può ottenere considerando che: $\dfrac{\alpha(\circ)}{\alpha(rad)} = \dfrac{180}{\pi}$, quindi:

$$\alpha(\circ) = \alpha(rad)\frac{180}{\pi}; \quad \alpha(rad) = \alpha(\circ)\frac{\pi}{180}$$

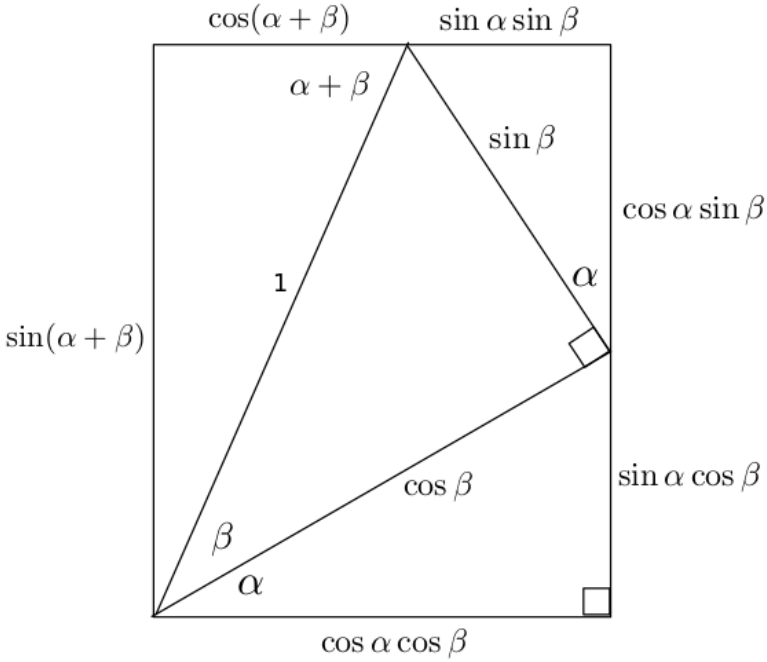


si può partire dallo schema sulla circonferenza goniometrica rappresentato in figura, dove
$\alpha = \widehat{AOD}$
$\beta = \widehat{AOC}$
$\alpha - \beta = \widehat{COD} = \widehat{AOB}$
L'ultima uguaglianza implica che
$\overline{CD} = \overline{AB} \Rightarrow \overline{CD}^2 = \overline{AB}^2$
ovvero

$$(x_C - x_D)^2 + (y_C - y_D)^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2$$
$$(\cos\beta - \cos\alpha)^2 + (\sin\beta - \sin\alpha)^2 = (1 - \cos(\alpha-\beta))^2 + (0 - \sin(\alpha-\beta))^2$$
$$\cos^2\beta + \cos^2\alpha - 2\cos\beta\cos\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\alpha - 2\sin\beta\sin\alpha =$$
$$= 1 + \cos^2(\alpha-\beta) - 2\cos(\alpha-\beta) + \sin^2(\alpha-\beta)$$
da cui
$$2 - 2\cos\beta\cos\alpha - 2\sin\beta\sin\alpha = 2 - 2\cos(\alpha-\beta)$$
ed infine
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

Le altre formule di addizione e sottrazione si ricavano facilmente dalle proprietà generali delle funzioni goniometriche.

In alternativa, se α e β sono compresi tra 0 e 90°, tutte le formule di addizione e sottrazione si possono ricavare dal seguente ingegnoso schema geometrico. ■



Proprietà 1.83 (formula di Erone) *L'area di un triangolo di lati a, b, c vale:*

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

dove: p è il semiperimetro.

Dimostrazione. Discende dalla formula di Brahmagupta considerando un lato di lunghezza nulla. ■

1.16 Vettori

Definizione 1.85 (vettore) *Si dice vettore una qualsiasi grandezza rappresentabile con un segmento orientato.*

Graficamente un vettore può essere quindi rappresentato con una freccia, ovvero definito da tre caratteristiche:

1. Modulo o intensità = lunghezza del segmento
2. Direzione = retta su cui giace il segmento o una ad essa parallela
3. Verso = orientazione del segmento (punto iniziale e punto finale)

Nella convenzione anglosassone:

Direzione+Verso = Direction

Algebricamente i vettori possono essere rappresentati da lettere con una freccetta sopra, p.es. $\vec{a}$, oppure in grassetto **a**, oppure se il punto inziale è A e quello finale è B con $\overrightarrow{AB}$.

Convenzioni simboliche:

Modulo di $\vec{a} = |\vec{a}| = a$;

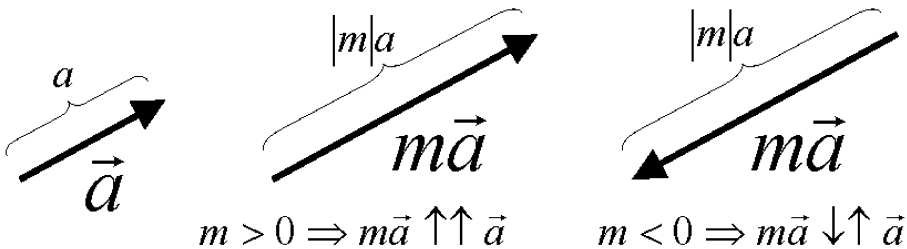
Modulo di $\overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| = \overline{AB}$

Definizione 1.86 (prodotto: numero per vettore) *La moltiplicazione di un numero m per un vettore $\vec{a}$ restituisce il vettore $m\vec{a}$ avente:*

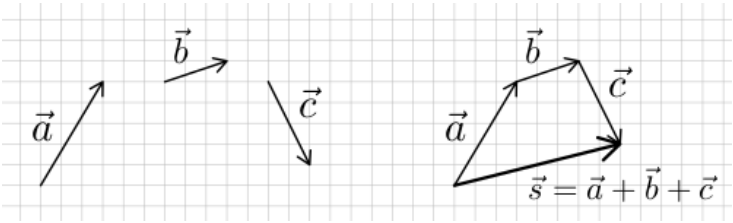
modulo = modulo di $\vec{a}$ per il valore assoluto di m;

direzione = direzione di $\vec{a}$;

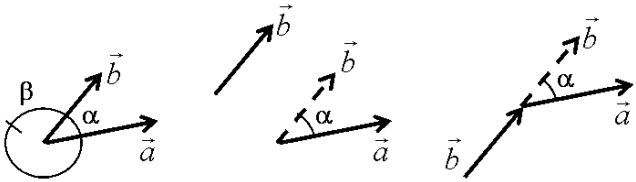
verso = concorde o discorde con $\vec{a}$ rispettivamente se $m > 0$ o $m < 0$



Definizione 1.87 (somma di vettori (metodo punta-coda)) .
La somma di più vettori, preventivamente ordinati e traslati in modo da far coincidere la punta di uno con la coda del successivo, è il vettore avente il punto iniziale coincidente con la coda del primo ed il punto finale coincidente con la punta dell'ultimo.



Definizione 1.88 (angolo compreso) . *L'angolo compreso fra due vettori è l'angolo minore individuato dai due vettori, traslando opportunamente uno di essi in modo da far coincidere i loro punti iniziali.*



α = angolo compreso; β = angolo non compreso

Definizione 1.89 (prodotto scalare) *È il prodotto fra due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$, si indica col simbolo $\vec{a} \cdot \vec{b}$, e da come risultato uno scalare, definito come prodotto dei moduli per il coseno dell'angolo compreso α.*

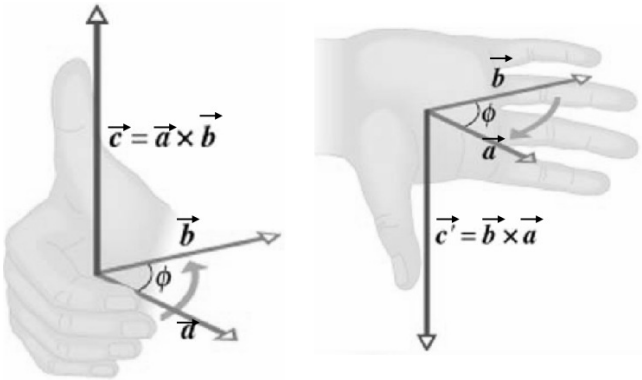
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \alpha$$

Definizione 1.90 (prodotto vettoriale) *È il prodotto fra due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$, si indica col simbolo $\vec{a} \times \vec{b}$, e da come risultato un vettore avente:*

1. *modulo $= ab \sin \alpha$, dove α è l'angolo compreso;*

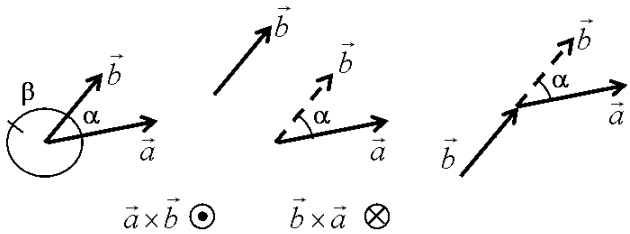
2. *direzione perpendicolare al piano individuato dai due vettori;*

3. *verso dato dalla regola della mano destra: con il palmo della mano destra aperta, pollice a 90° rispetto alle altre dita, si immagina di spostare il primo vettore del prodotto sul secondo seguendo l'angolo compreso; il pollice indicherà così il verso del vettore prodotto vettoriale.*



Dalla definizione di prodotto vettoriale discende immediatamente che $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$, cioé si dice che il prodotto vettoriale è *anticommutativo*.

Definizione 1.91 (vettori entranti e uscenti dal foglio) *Se i vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ sono nel piano del foglio, per rappresentare il prodotto vettoriale $\vec{a} \times \vec{b}$, che è un vettore perpendicolare ad esso, si utilizzano i simboli $\odot$ e $\otimes$ per indicare vettori perpendicolari al foglio con verso rispettivamente uscente ed entrante.*



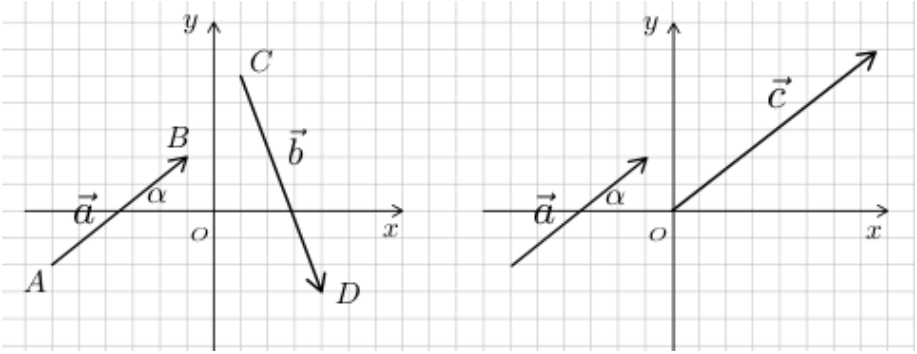
Proprietà 1.84 (proprietà delle operazioni con i vettori) *Siano m, n scalari e $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vettori; si dimostrano le seguenti proprietà.*

Prodotto numero-vettore	*Prodotto scalare*	*Prodotto vettoriale*
$(m+n)\vec{a} = m\vec{a} + n\vec{a}$	$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$	$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
$(mn)\vec{a} = m(n\vec{a})$	$(m\vec{a}) \cdot \vec{b} = m(\vec{a} \cdot \vec{b})$	$(m\vec{a}) \times \vec{b} = m(\vec{a} \times \vec{b})$
$m(\vec{a} + \vec{b}) = m\vec{a} + m\vec{b}$	$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$	$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

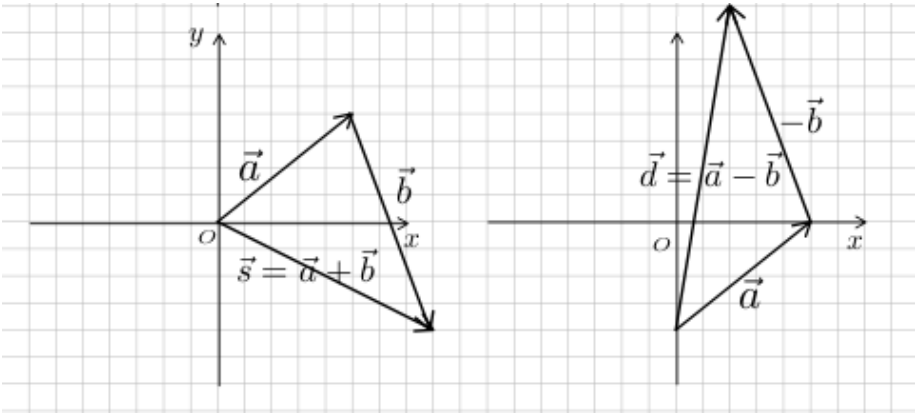
1.16.1 Rappresentazione cartesiana dei vettori

Definizione 1.92 (versore di una retta orientata) *Il versore di una retta orientata, detto anche* **vettore base**, *è un vettore di modulo unitario avente la stessa direzione e verso della retta.*

Convenzionalmente i versori, ovvero i **vettori base**, *degli assi cartesiani x, y, z vengono indicati rispettivamente con $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ oppure con $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$.*



$\vec{a} = (-1+6, 2+2) = (5,4)$; $a = \sqrt{5^2+4^2} = 6.4$
$\vec{b} = (4-1, -3-5) = (3,-8)$; $a = \sqrt{3^2+(-8)^2} = 8.544$
$\tan\alpha = \frac{|a_x|}{|a_y|} = \frac{4}{5} = 0.8 \Rightarrow \alpha = \tan^{-1} 0.8 = 38.66°$
$\vec{c} = \frac{3}{2}\vec{a} = (\frac{3}{2}a_x, \frac{3}{2}a_y) = (7.5, 6)$; $c = \sqrt{7.5^2+6^2} = 9.6 = \frac{3}{2}a$



$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} = (5,4) + (3,-8) = (8,-4)$; $s = \sqrt{8^2+(-4)^2} = 8.94$
$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = (5,4) - (3,-8) = (2,12)$; $d = \sqrt{2^2+12^2} = 12.166$

1.17 Disequazioni e studio del segno

Definizione 1.95 (disequazione) *Una disequazione è una disuguaglianza tra due espressioni, dette "membro di sinistra" e "membro di destra", condizionata dai valori di determinate lettere, presenti nelle espressioni, dette "incognite".*

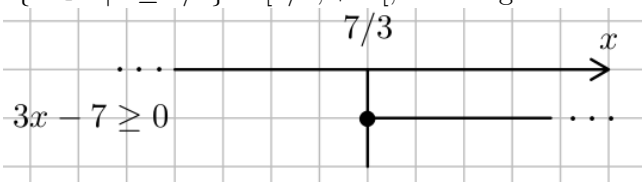
Risolvere una disequazione *significa trovare i valori delle incognite che verificano la disuguaglianza.*

L'insieme dei valori che verificano una disequazione è detta "soluzione" della disequazione.

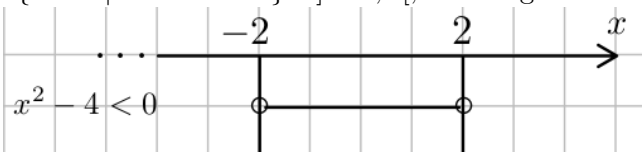
Una disequazione è detta: **determinata** *se risulta verificata per un determinato numero (in genere illimitato) di valori delle incognite;*

indeterminata *se risulta verificata per ogni valore (a priori) ammissibile delle incognite;* **impossibile** *se non risulta verificata per alcun valore (a priori) ammissibile delle incognite.*

Esempi.
La soluzione della disequazione $3x - 7 \geq 0$ è $x \geq 7/3$, ovvero l'insieme $S = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 7/3\} = [7/3, +\infty[$, ovvero graficamente:



La soluzione della disequazione $x^2 - 4 < 0$ è $-2 < x < 2$, ovvero l'insieme $S = \{x \in \mathbb{R} | -2 < x < 2\} =]-2, 2[$, ovvero graficamente:



Definizione 1.96 (disequazioni equivalenti) *Due disequazioni si dicono equivalenti se sono verificate dagli stessi valori delle incognite, ovvero se hanno la stessa soluzione.*

Esempi.
Le disequazioni: $x + 1 > 0$ e $3^x > 1/3$ sono equivalenti perché hanno entrambe come soluzione $x > -1$.
Le disequazioni: $9 - x^2 \geq 0$ e $(x + 3)(2^x - 8) \leq 0$ sono equivalenti perché hanno entrambe come soluzione $-3 \leq x \leq 3$, ovvero l'insieme $S = \{x \in \mathbb{R} | -3 \leq x \leq 3\} = [-3, 3]$.

***Principio* 1.6 (I principio di equivalenza delle disequazioni)** .
Sommando al membro di sinistra ed al membro di destra di una disequazione una stessa espressione, si ottiene una disequazione equivalente.

***Principio* 1.7 (II principio di equivalenza delle disequazioni)**
.
Moltiplicando o dividendo il membro di sinistra ed il membro di destra di una disequazione per una stessa espressione diversa da zero, si ottiene una disequazione equivalente con: lo stesso verso se l'espressione è positiva, con verso opposto se l'espressione è negativa.

Definizione 1.97 (disequazioni elementari) *Una disequazione si dice elementare se può essere risolta applicando solo i due principi di equivalenza.*

Esempi. Una disequazione elementare può essere ad esempio la seguente

$2 - 5x \leq 6 \qquad (1)$

infatti possiamo risolverla come segue.

Aggiungere -2 ad entrambi i membri (primo criterio)

$-2 + 2 - 5x \leq -2 + 6$

$-5x \leq 4$

Dividere entrambi i membri con -5 (secondo criterio), ricordando di invertire il verso della disequazione, essendo il numero -5 negativo

$x \geq -\frac{4}{5}$

che è la soluzione della (1).

Definizione 1.98 (studio del segno) *Studiare il segno di una espressione contenente una sola variabile, diciamo x, significa stabilire per quali valori di x, l'espressione risulta:*

positiva (simbolo $+$)

negativa (simbolo $-$)

nulla (simbolo $\bigcirc$)

non definita (simbolo $\nexists$ oppure ///)

Esempi.

$$2x - 5 \quad --- \overset{\frac{5}{2}}{\bigcirc} +++$$

$$x^2 - 4 \quad +++ \overset{-2}{\bigcirc} --- \overset{2}{\bigcirc} +++$$

$$\frac{2}{x-3} \quad --- \overset{3}{\nexists} +++$$

$$\sqrt{x^2 - 4} \quad +++ \overset{-2}{\bigcirc} /// \overset{2}{\bigcirc} +++$$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2-4}} \quad +++ \overset{-2}{\nexists} /// \overset{2}{\nexists} +++$$

$$\sin x \quad \overset{0}{\bigcirc} +++ \overset{\pi}{\bigcirc} --- \overset{2\pi}{\bigcirc}$$

$$\ln(x-5) \quad /// \overset{5}{\nexists} --- \overset{6}{\bigcirc} +++$$

$$\frac{1}{\sin x} \quad \overset{0}{\nexists} +++ \overset{\pi}{\nexists} --- \overset{2\pi}{\nexists}$$

Proprietà 1.87 (segno di un polinomio di secondo grado) *Nota come regola D.I.C.E. (Discordi Interni Concordi Esterni): il segno di un polinomio $p(x)$ di secondo grado è "discorde" rispetto al segno del coefficiente del termine di secondo grado per i valori di x "interni" all'intervallo delle due radici, mentre è "concorde" per i valori di x "esterni" al suddetto intervallo.*

Una versione più dettagliata della suddetta proprietà è la seguente.