Problema 124 — Moto di Giulia e Laura

Testo. Giulia e Laura corrono in direzioni opposte su due corsie di una pista di atletica con velocità, rispettivamente, di 2,00 m/s e 4,00 m/s. Quando si trovano a 100 m l'una dall'altra, Giulia aumenta il ritmo della propria corsa con un'accelerazione di 0,500 m/s^2, mentre Laura mantiene costante la propria velocità. Quanto spazio percorrono prima di incrociarsi?

1 Schema della situazione

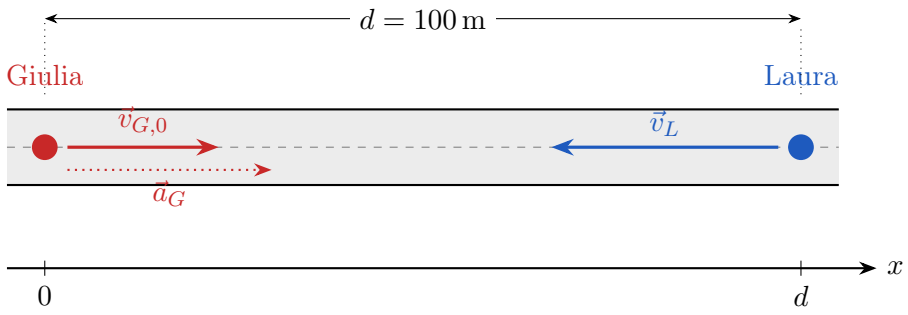


Figura 1: Istante iniziale ($t = 0$): Giulia è nell'origine e corre verso destra con velocità $v_{G,0}$ e accelerazione a_G; Laura è a distanza d e corre verso sinistra a velocità costante v_L.

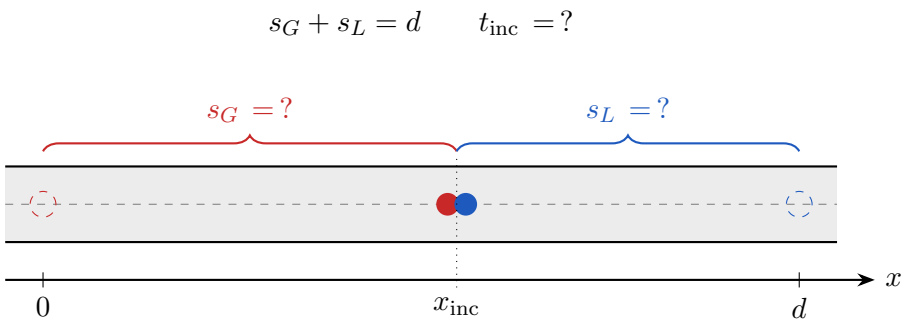


Figura 2: Istante dell'incrocio ($t = t_{\text{inc}}$): le due atlete occupano la stessa posizione e la somma degli spazi percorsi è uguale alla distanza iniziale d.

2 Grandezze fisiche coinvolte

Si sceglie un asse x con origine nella posizione iniziale di Giulia e verso diretto da Giulia verso Laura. L'istante iniziale è $t = 0$.

Grandezza	**Simbolo**	**Valore**
Velocità iniziale di Giulia	$v_{G,0}$	$2{,}00\,\mathrm{m/s}$
Accelerazione di Giulia	$a_G = a$	$0{,}500\,\mathrm{m/s^2}$
Velocità (costante) di Laura	v_L	$4{,}00\,\mathrm{m/s}$
Distanza iniziale tra le atlete	d	$100\,\mathrm{m}$
Istante dell'incrocio	t_{inc}	$=?$
Spazio percorso da Giulia	s_G	$=?$
Spazio percorso da Laura	s_L	$=?$

3 Leggi orarie

Giulia si muove di moto uniformemente accelerato, Laura di moto rettilineo uniforme (verso negativo dell'asse x):

$$x_G(t) = v_{G,0}\,t + \tfrac{1}{2}\,a\,t^2, \tag{1}$$
$$x_L(t) = d - v_L\,t. \tag{2}$$

Gli spazi percorsi fino all'istante t sono

$$s_G(t) = v_{G,0}\,t + \tfrac{1}{2}\,a\,t^2, \qquad s_L(t) = v_L\,t. \tag{3}$$

4 Condizione di incrocio

Le due atlete si incrociano quando occupano la stessa posizione, $x_G(t_{\mathrm{inc}}) = x_L(t_{\mathrm{inc}})$, ovvero (equivalentemente) quando la somma degli spazi percorsi è pari a d:

$$v_{G,0}\,t_{\mathrm{inc}} + \tfrac{1}{2}\,a\,t_{\mathrm{inc}}^2 + v_L\,t_{\mathrm{inc}} = d. \tag{4}$$

Riordinando si ottiene un'equazione di secondo grado nell'incognita t_{inc}:

$$\tfrac{1}{2}\,a\,t_{\mathrm{inc}}^2 + (v_{G,0} + v_L)\,t_{\mathrm{inc}} - d = 0. \tag{5}$$

Il discriminante è positivo e il prodotto delle radici è $-2d/a < 0$: le soluzioni hanno segno opposto e solo quella positiva ha significato fisico ($t_{\mathrm{inc}} > 0$):

$$\boxed{t_{\mathrm{inc}} = \frac{-(v_{G,0} + v_L) + \sqrt{(v_{G,0} + v_L)^2 + 2\,a\,d}}{a}} \tag{6}$$

5 Spazi percorsi in forma letterale

$$\boxed{s_L = v_L\,t_{\mathrm{inc}} = \frac{v_L}{a}\left[-(v_{G,0} + v_L) + \sqrt{(v_{G,0} + v_L)^2 + 2\,a\,d}\right]} \tag{7}$$

$$\boxed{s_G = d - s_L = v_{G,0}\,t_{\mathrm{inc}} + \tfrac{1}{2}\,a\,t_{\mathrm{inc}}^2} \tag{8}$$

Verifica dimensionale: $[v^2] = [a\,d] = \mathrm{m^2/s^2}$, quindi il radicando è omogeneo; $[v/a] = \mathrm{s}$, quindi t_{inc} è un tempo e $s_L = v_L t_{\mathrm{inc}}$ è una lunghezza.

6 Sostituzione dei valori numerici

$$v_{G,0} + v_L = 2{,}00\,\mathrm{m/s} + 4{,}00\,\mathrm{m/s} = 6{,}00\,\mathrm{m/s}, \tag{9}$$

$$2\,a\,d = 2 \cdot 0{,}500\,\mathrm{m/s^2} \cdot 100\,\mathrm{m} = 100\,\mathrm{m^2/s^2}, \tag{10}$$

$$\sqrt{(v_{G,0} + v_L)^2 + 2ad} = \sqrt{36{,}0\,\mathrm{m^2/s^2} + 100\,\mathrm{m^2/s^2}} = 11{,}66\,\mathrm{m/s}, \tag{11}$$

$$t_{\mathrm{inc}} = \frac{-6{,}00\,\mathrm{m/s} + 11{,}66\,\mathrm{m/s}}{0{,}500\,\mathrm{m/s^2}} = 11{,}3\,\mathrm{s}, \tag{12}$$

$$s_L = v_L\,t_{\mathrm{inc}} = 4{,}00\,\mathrm{m/s} \cdot 11{,}32\,\mathrm{s} = 45{,}3\,\mathrm{m}, \tag{13}$$

$$s_G = d - s_L = 100\,\mathrm{m} - 45{,}3\,\mathrm{m} = 54{,}7\,\mathrm{m}. \tag{14}$$

Controllo con la legge oraria di Giulia: $s_G = 2{,}00\,\mathrm{m/s} \cdot 11{,}32\,\mathrm{s} + \frac{1}{2} \cdot 0{,}500\,\mathrm{m/s^2} \cdot (11{,}32\,\mathrm{s})^2 \simeq 22{,}6\,\mathrm{m} + 32{,}0\,\mathrm{m} = 54{,}7\,\mathrm{m}$. ✓

Risultato: $s_G \simeq 54{,}7\,\mathrm{m}$ (Giulia), $s_L \simeq 45{,}3\,\mathrm{m}$ (Laura), $t_{\mathrm{inc}} \simeq 11{,}3\,\mathrm{s}$.